

# Kompendium der Maschinendynamik

Dieter Kraft  
Fachbereich Maschinenbau  
Fachhochschule München



# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	viii
1 Einführung	1
1.1 Modellbildung . . . . .	2
1.1.1 Newton-Euler . . . . .	2
1.1.2 Lagrange . . . . .	3
1.2 Harmonische Bewegung . . . . .	4
1.2.1 Begriffe . . . . .	5
1.2.2 Beschreibung . . . . .	6
1.3 Definitionen . . . . .	7
1.3.1 Zeitbereich . . . . .	7
1.3.2 Frequenzbereich . . . . .	8
1.4 Physikalische Ersatzsysteme . . . . .	8
1.4.1 Federkonstanten . . . . .	8
1.4.1.1 Addition . . . . .	8
1.4.1.2 Balken und Stäbe . . . . .	9
2 Ein-Freiheitsgrad-Systeme	11
2.1 Ungedämpfte Eigenbewegung . . . . .	11
2.1.1 Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	11
2.1.2 Bewegungsformen . . . . .	13
2.1.2.1 Anfangsbedingungen . . . . .	13
2.1.2.2 Winkeladdition . . . . .	14
2.1.2.3 Phasenportrait . . . . .	15
2.1.3 Beispiele . . . . .	15
2.1.3.1 Manometer-Schwingung . . . . .	15
2.1.3.2 Strukturschwingung . . . . .	16
2.1.3.3 Torsionsschwingung . . . . .	16
2.2 Gedämpfte Eigenbewegung . . . . .	17
2.2.1 Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	17
2.2.2 Bewegungsformen . . . . .	18
2.2.2.1 Ungedämpfte Schwingung . . . . .	18
2.2.2.2 Kritische Dämpfung . . . . .	19
2.2.2.3 Unterdämpftes System . . . . .	19
2.2.2.4 Überdämpftes System . . . . .	22

---

2.2.3	Charakteristika . . . . .	23
2.2.3.1	Stabilität . . . . .	23
2.2.3.2	Logarithmisches Dekrement . . . . .	24
2.2.3.3	Energieverluste . . . . .	25
2.2.4	Alternative Dämpfungsmodelle . . . . .	25
2.2.4.1	Trockene Reibung . . . . .	26
2.3	Harmonische Anregung . . . . .	28
2.3.1	Harmonische Anregung des ungedämpften Systems . . . . .	29
2.3.1.1	Resonanz . . . . .	31
2.3.1.2	Schwebung . . . . .	32
2.3.2	Harmonische Anregung des gedämpften Systems . . . . .	34
2.3.2.1	Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	34
2.3.2.2	Diskussion der Lösung . . . . .	35
2.3.2.2.1	Vergrößerungsfunktion I . . . . .	35
2.3.2.2.2	Phasenwinkel I . . . . .	37
2.3.2.2.3	Kraftübertragung I . . . . .	38
2.3.2.2.4	Bandbreite . . . . .	38
2.3.3	Komplexe Erregerfunktion . . . . .	40
2.3.3.1	Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	41
2.3.3.2	Frequenzgang . . . . .	41
2.3.3.3	Frequenzgang und Übertragungsfunktion . . . . .	42
2.3.3.4	Geometrische Darstellung . . . . .	43
2.3.4	Alternative harmonische Anregungen . . . . .	43
2.3.4.1	Harmonische Anregung der Basis . . . . .	44
2.3.4.1.1	Vergrößerungsfunktion II . . . . .	46
2.3.4.1.2	Relativbewegung . . . . .	48
2.3.4.1.3	Kraftübertragung II . . . . .	49
2.3.4.2	Rotatorische Unwucht . . . . .	50
2.3.5	Alternative Dämpfungsmodelle II . . . . .	53
2.3.5.1	Coulomb-Dämpfung . . . . .	53
2.3.5.2	Hysterese-Dämpfung . . . . .	53
2.3.5.3	Luft-Dämpfung . . . . .	56
2.3.5.4	Kombinierte Dämpfungen . . . . .	57
2.3.6	Strömungs-induzierte Schwingungen . . . . .	57
2.3.7	Beispiele und Übungen . . . . .	58
2.4	Nicht-harmonische Anregungsfunktionen . . . . .	66
2.4.1	Sprung-Funktion . . . . .	67
2.4.1.1	Sprungfunktion im Zeitbereich . . . . .	67
2.4.1.2	Sprungfunktion im Frequenzbereich . . . . .	68
2.4.1.3	Anwendung . . . . .	68
2.4.2	Impuls-Funktion . . . . .	71
2.4.2.1	Impulsfunktion im Zeitbereich . . . . .	72
2.4.2.2	Impulsfunktion im Frequenzbereich . . . . .	73
2.4.2.3	Anwendung . . . . .	74
2.4.3	Allgemeine Anregung . . . . .	77
2.4.3.1	Impulsantwort . . . . .	77

---

2.4.3.2	Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	77
2.4.4	Numerische Lösung . . . . .	79
2.4.4.1	Approximation der Anregung . . . . .	79
2.4.4.2	Numerische Lösung . . . . .	79
3	Zwei-Freiheitsgrad-Systeme . . . . .	81
3.1	Eigenbewegung . . . . .	81
3.1.1	Ungedämpfte Eigenbewegung . . . . .	81
3.1.1.1	Modellbildung . . . . .	81
3.1.1.2	Lösung der Matrix-Differentialgleichung . . . . .	82
3.1.1.2.1	Lösungsansatz . . . . .	82
3.1.1.2.2	Eigenfrequenzen . . . . .	83
3.1.1.2.3	Eigenformen . . . . .	84
3.1.1.2.4	Allgemeine Lösung . . . . .	85
3.1.1.3	Modal-Analyse . . . . .	87
3.1.1.3.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	87
3.1.1.3.2	Transformation auf Diagonalform . . . . .	90
3.1.1.3.3	Entkopplung der Systemgleichungen . . . . .	91
3.1.1.4	Beispiele . . . . .	95
3.1.1.4.1	Werkzeugmaschine . . . . .	96
3.1.1.4.2	Doppelpendel . . . . .	99
3.1.2	Gedämpfte Eigenbewegung . . . . .	102
3.1.2.1	Modell-Gleichungen . . . . .	102
3.1.2.2	Modal-Analyse . . . . .	103
3.2	Erzwungene Bewegung . . . . .	104
3.2.1	Bewegungsgleichungen . . . . .	104
3.2.2	Modal-Analyse . . . . .	104
3.2.3	Drei Integrale . . . . .	105
3.2.3.1	Harmonische Anregung des gedämpften Systems . . . . .	105
3.2.3.2	Sprungförmige Anregung des gedämpften Systems . . . . .	105
3.2.3.3	Harmonische Anregung des ungedämpften Systems . . . . .	105
3.2.3.4	Lösungen der Integrale . . . . .	105
3.2.4	Beispiele . . . . .	106
3.2.4.1	KFZ-Aufhängung . . . . .	106
3.2.4.2	KFZ-Nickbewegung . . . . .	109
4	Viel-Freiheitsgrad-Systeme . . . . .	111
5	Kontinuierliche Systeme . . . . .	113
5.1	Systeme zweiter Ordnung . . . . .	113
5.1.1	Die Schwingende Saite . . . . .	113
5.1.1.1	Mathematisches Modell . . . . .	113
5.1.1.2	Lösung der Wellengleichung . . . . .	115
5.1.1.3	Charakteristische Gleichung . . . . .	119
5.1.2	Längsschwingung von Stäben . . . . .	120

---

---

5.1.2.1	Mathematisches Modell . . . . .	120
5.1.2.2	Lösung der Modellgleichung . . . . .	121
5.1.2.3	Alternative Randwerte . . . . .	123
5.1.3	Torsionsschwingungen von Stäben . . . . .	124
5.1.3.1	Mathematisches Modell . . . . .	124
5.2	Systeme vierter Ordnung . . . . .	125
5.2.1	Biegeschwingung von Balken . . . . .	125
5.2.1.1	Mathematisches Modell . . . . .	125
5.2.1.1.1	Euler-Theorie schlanker Balken . . . . .	125
5.2.1.1.2	Randwerte und Anfangswerte . . . . .	128
5.2.1.2	Lösung der Modellgleichung . . . . .	128
5.2.1.2.1	Ortskomponente . . . . .	129
5.2.1.2.2	Zeitkomponente . . . . .	130
5.2.1.2.3	Timoshenko-Theorie dicker Balken . . . . .	131
6	Technische Anwendungen . . . . .	135
6.1	Schwingungsdämpfung . . . . .	135
6.2	Schwingungstilgung . . . . .	135
6.2.1	Ungedämpfte Schwingungstilgung . . . . .	135
6.2.1.1	Eigenwerte der isolierten Maschine . . . . .	138
6.2.2	Gedämpfte Schwingungstilgung . . . . .	139
6.2.2.1	Optimierung . . . . .	140
6.3	Experimentelle Modalanalyse . . . . .	140
6.3.1	Stochastische Signale . . . . .	140
6.3.2	Ermittlung der System-Parameter . . . . .	143
6.3.2.1	Eigenfrequenz und Dämpfung . . . . .	144
6.3.2.2	Eigenvektoren . . . . .	144
6.3.2.2.1	Betrag der Eigenvektorelemente . . . . .	146
6.3.2.2.2	Vorzeichen der Eigenvektorelemente . . . . .	146
6.3.2.3	Beispiel . . . . .	146
6.3.2.3.1	Eigenfrequenz und Dämpfung . . . . .	150
6.3.2.3.2	Eigenvektoren . . . . .	150
	Anhang . . . . .	154
A	Integral-Transformationen . . . . .	155
A.1	Fourier-Transformation . . . . .	155
A.1.1	Fourier-Reihen . . . . .	155
A.1.2	Diskrete Fourier-Transformation . . . . .	156
A.1.3	Fenster-Funktionen . . . . .	156
A.1.4	Eigenschaften und Berechnung . . . . .	156
A.1.5	Beispiel . . . . .	157
A.2	Laplace-Transformation . . . . .	158
A.2.1	Definition . . . . .	158
A.2.2	Eigenschaften . . . . .	161
A.3	Partialbruchzerlegung . . . . .	165

---

---

A.3.1	Reelle Nullstellen . . . . .	165
A.3.1.1	Einfache Nullstellen . . . . .	165
A.3.1.2	Mehrfache Nullstellen . . . . .	166
A.3.2	Komplexe Nullstellen . . . . .	166
A.3.3	Beispiele und Übungen . . . . .	166
A.4	Algebraisierung linearer Differentialgleichungen . . . . .	168
B	Matrixalgebra . . . . .	171
B.1	Definitionen . . . . .	171
B.2	Algebraische Operationen . . . . .	172
B.3	Iterative Operationen . . . . .	173
C	Linearisierung . . . . .	179
C.1	Taylor-Entwicklung . . . . .	179
C.2	Standard-Form . . . . .	180
C.3	Beispiele und Übungen . . . . .	181
D	Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	185
D.1	Analytische Lösung . . . . .	185
D.1.1	Lösung im Frequenzbereich . . . . .	185
D.1.1.1	Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung . . . . .	186
D.1.2	Lösung im Zeitbereich . . . . .	187
D.1.2.1	Homogene Lösung . . . . .	187
D.1.2.2	Partikuläre Lösung . . . . .	188
D.1.2.3	Gesamtlösung . . . . .	189
D.1.2.4	Methode der unbestimmten Koeffizienten . . . . .	190
D.2	Numerische Lösung . . . . .	194
D.2.1	Diskretisierung . . . . .	194
D.2.1.1	Lösungsalgorithmus . . . . .	194
D.2.1.2	Berechnung von $\Phi$ und $\Gamma$ . . . . .	195
D.2.2	Taylor-Entwicklung . . . . .	196
D.2.2.1	Lösungsalgorithmus . . . . .	197
D.2.2.1.1	Euler-Verfahren . . . . .	198
D.2.2.1.2	Heun-Verfahren . . . . .	198
D.2.2.1.3	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	199
D.2.2.2	Computer-Prozedur . . . . .	199
D.3	Beispiel: Balancierter Stab . . . . .	200
D.3.1	Diskretisierung . . . . .	202
D.3.2	Reihen-Entwicklung . . . . .	202
E	Charakterisierung partieller Differentialgleichungen . . . . .	205
	Bibliographie . . . . .	209

---



# Vorwort

Das Vorwort muß noch geschrieben werden.<sup>1</sup> Hier nur soviel:

1. Der Stoff des Sommersemesters beinhaltet ausführlich Schwingungen linearer Systeme mit einem Freiheitsgrad (Kapitel 2). Systeme mit mehreren Freiheitsgraden und kontinuierliche Systeme werden im Wintersemester und weitergehend im Studienschwerpunkt ‘Entwicklung und Versuch’ behandelt.
2. Das Schreiben dieses Manuskripts hat mir sehr viel Freude gemacht,<sup>2</sup>
3. Das Manuskript enthält wahrscheinlich viele Fehler. Helfen Sie mir durch Rückkopplung: Nennen Sie Fehler, machen Sie Verbesserungsvorschläge, fragen Sie bei Unklarheiten, etc.<sup>3</sup>
4. Der jeweils letzte Stand des Manuskripts ist als Postscript-File unter <http://www.fm.fh-muenchen.de:8080/~dkraft> verfügbar.
5. Dank sei gesagt den Vielen, die nach den Grundsätzen der Free Software Foundation das Gnu-Projekt vorantreiben, das Betriebssystem Linux promovieren, das geniale Textsatzsystem T<sub>E</sub>X geschrieben haben, das einfache CAD-System Xfig managen, u.v.a.m. Stellvertretend für viele hier nur einige Namen: Richard Stallman, Linus Torvalds, Donald Knuth, Brian Smith, Tomas Rokicki, Karl Berry, Thomas Esser.
6. Ein dringender Hinweis: Vollziehen Sie die Beispiele nach; fragen Sie, wenn ich Zwischenschritte zu eilig ausgelassen habe, rechnen Sie die Aufgaben mit Papier und Bleistift durch,<sup>4</sup> reines Durchlesen ist überflüssige Zeitverschwendung.
7. Arbeiten Sie sich in ein Computer-Algebra-System ein und überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse. In spätestens fünf Jahren machen Sie die Prüfung unter Zu-Hilfe-Nahme eines Notebooks.<sup>5</sup>

Meine Sprechstunde:  
Di 13–14 Uhr,  
Raum W-1.07,  
Tel. 1265-1177.



---

<sup>1</sup>©Dieter Kraft. 5. Auflage, sS 1999.

<sup>2</sup>Ich hoffe, daß das Gleiche für Sie beim Lesen und Üben gilt.

<sup>3</sup>Prof. Casper, der Präsident der renomierten Stanford University, behauptet, daß Professoren von Studenten mindestens ebensoviel lernen wie umgekehrt!

<sup>4</sup>Die Lernpsychologie hat gefunden, daß motorische (Hand-)Bewegungen dem Gehirn sehr hilfreich zur Seite stehen.

<sup>5</sup>Ein Reutlinger Gymnasium macht heuer einen Probeversuch beim Abitur.

Das Manuskript gliedert sich in Kapitel, Abschnitte, Unterabschnitte, Paragraphen u.s.w. Die Gleichungen sind abschnittsweise durchnummeriert. Das Zeichen  $\nabla!$  weist auf wichtige Resultate hin, das Zeichen  $\square$  schließt jeweils eine Aufgabe, ein Beispiel, eine Übung, etc. ab. Kleingedrucktes kann beim ersten Lesen übergangen werden; es zählt nicht zum Prüfungsstoff.

Wer einen Index<sup>6</sup> für dieses Manuskript für den Hungerlohn einer Hilfskraft erstellen will, der komme bitte in meine Sprechstunde oder vereinbare einen anderen Termin mit mir.

Das gleiche gilt für die Verschönerung der Abbildungen. Diese wurden folgendermaßen erzeugt: Falls Funktionsgraphen Teil einer Abbildung sind, wurden diese mit `Matlab` oder `MuPAD` gebildet, von dort als PostScript-Files exportiert, als solche nach `Xfig` importiert und dort weiter bearbeitet, Alle anderen Abbildungen wurden mit `Xfig` erzeugt, als PostScript-Dateien exportiert und nach `LATEX` importiert.

Neben den im Text zitierten Referenzen seien noch folgende deutschsprachige<sup>7</sup> Quellen erwähnt: [49], [16].

---

<sup>6</sup>Mit dem Programm `makeindex` [7].

<sup>7</sup>Im Zeichen der Europäischen Union, der ökonomischen Globalisierung und der Multikulturen ist die Lektüre englischer Fachtexte für jeden Studenten unabdingbar.

---

# Kapitel 1

## Einführung

Die Schwingungslehre beschreibt die oszillierende Bewegung von Körpern unter dem Einfluß von systemimmanenten und äußeren Kräften und Momenten. Alle Systeme, die mit Masse und Elastizität ausgestattet sind, sind grundsätzlich schwingungsfähig. Dies trifft auf den Großteil (elektro-)mechanischer Maschinen, Anlagen und Strukturen zu. Die schwingungstechnische, d.h. maschinendynamische Analyse und Synthese dieser Systeme ist deshalb für den angehenden Maschinenbau-Ingenieur von außerordentlicher Bedeutung.

Die Anzahl der unabhängigen Koordinaten, die zur Beschreibung eines Systems genügt, wird als der Freiheitsgrad des Systems bezeichnet. So ist ein inertial aufgehängtes, ebenes Pendel ein System mit einem Freiheitsgrad, da der momentane Pendelwinkel relativ zu einer Referenzlage die Pendelbewegung eindeutig beschreibt. Ein analog geartetes Doppelpendel ist ein System mit zwei Freiheitsgraden, eine schwingende Saite ein solches mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Ein räumlich ausgedehnter starrer Körper hat sechs Freiheitsgrade, drei der Translation und drei der Rotation.

Diese Einführung beschränkt sich auf lineare oder abschnittsweise lineare Bewegung<sup>1</sup>, bei denen das Superpositionsprinzip gilt, und für die die abgeschlossene Theorie linearer Differentialgleichungen zur Verfügung steht.

Grundsätzlich wird (für Systeme mit beliebiger Anzahl von Freiheitsgraden) zwischen freier und erzwungener Schwingung unterschieden. Freie Schwingung findet statt, wenn das System nur unter dem Einfluß systemimmanenter Kräfte und Momente schwingt, z.B. unter dem der Rückstellkraft einer elastischen Feder. Dann schwingt das System in einer oder mehrerer seiner Eigenfrequenzen. Erzwungene Schwingung ist die Schwingung unter dem Einfluß äußerer Kräfte und Momente, z.B. eines elektrischen Antriebs. Ist diese Anregung ihrerseits eine oszillierende, dann schwingt das System mit der Anregungsfrequenz. Fällt diese mit einer Eigenfrequenz des Systems zusammen, dann kommt es zu gefährlichen

---

<sup>1</sup>Systeme mit Colomb-Dämpfung, s.a. Abschnitt 2.2.4.1, sind Beispiele für abschnittsweise lineare Systeme.



▽ Resonanzerscheinungen. Solche schon im Entwurf einer Maschine oder Struktur zu vermeiden gehört zu den wichtigen Aufgaben des Ingenieurs.

Wird in dem schwingenden System Energie dissipiert, z.B. durch Reibung, dann führt es eine gedämpfte Bewegung aus. Ist die Dämpfung klein, dann kann man sie meist vernachlässigen. Andererseits hat ihre Existenz einen beträchtlichen (mindernden) Einfluß auf die Resonanzamplitude.

## 1.1 Modellbildung

### 1.1.1 Newton-Euler

Die Modellbildung mechanischer Systeme beruht auf dem zweiten Newtonschen<sup>2</sup> Gesetz für translatorische Systeme:

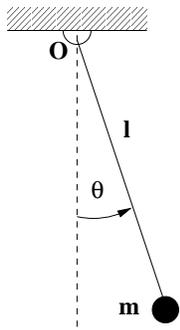
$$m\ddot{x}(t) = \sum f(t) \quad (1.1.1)$$

und dem Eulerschen<sup>3</sup> Satz für rotatorische Systeme:<sup>4</sup>

$$J\ddot{\theta}(t) = \sum m(t). \quad (1.1.2)$$

Zu diesen Fundamentalgesetzen kommen weitere mechanische, elektromechanische etc. Kraft- und Momentenbeziehungen, z.B. das Hooksche Gesetz aus der Elastizitätstheorie.

▽ In Gl. (1.1.1) und Gl. (1.1.2) wird zweimal der Buchstabe  $m$  für unterschiedliche Begriffe verwendet: Einmal für die (konstante) Masse  $m$  und einmal für das (variable) Moment  $m(t)$ . Letzteres führt immer das Argument  $t$  mit sich! Es sollten deshalb keine Verwechslungen vorkommen. Der Grund für die Verwendung kleiner Buchstaben für Kraft  $f(t)$  und Moment  $m(t)$  liegt in der Laplace-Transformation dieser Größen, s.a. Anh. A.2, nach deren Durchführung  $F(s)$  und  $M(s)$  mit Großbuchstaben belegt sind.



Beispiel 1 Eine Masse  $m$  sei an einem masselosen Faden der Länge  $l$  aufgehängt und vollführe um den Aufhängepunkt 'O' eine Pendelbewegung in einer vertikalen Ebene. Der Ausschlagwinkel gegenüber der vertikalen Ruhelage sei  $\theta$ . Wie lautet die Bewegungsgleichung?

Die Anordnung werde am Aufhängepunkt freigeschnitten, dann ist die Änderung des Drehimpulses um 'O'  $ml^2\ddot{\theta}(t)$ , während das äußere Moment  $m(t)$  (bedingt durch die Schwerkraft der Masse)  $-mgl\sin\theta(t)$  beträgt. Damit ist die

<sup>2</sup>Sir Isaac Newton (1642–1727), englischer Mathematiker und Physiker, entwickelte (unabhängig von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)) die Differential- und Integralrechnung. Bahnbrechende Beiträge zur Entwicklung der klassischen Mechanik.

<sup>3</sup>Leonhard Euler (1707–1783), schweizer Mathematiker, der in St. Petersburg und Berlin wirkte. Beiträge auf fast allen Gebieten der Mathematik und Physik: Differential- und Differenzgleichungen, komplexe Analysis, spezielle Funktionen, Reihen, Variationsrechnung, Mechanik, Fluidmechanik.

<sup>4</sup>In Gl. (1.1.1) bedeutet  $m$  die Masse des Systems, und in Gl. (1.1.2) ein von außen auf das System wirkende Moment.

*Modell(Differential)gleichung*

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) = 0.$$

Sie wird noch durch Anfangs- und/oder Randwerte, z.B.  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  festgelegt.

Die Differentialgleichung ist homogen, aber nichtlinear. Eine Entwicklung der Sinus-Funktion  $\sin \theta = \theta - \theta^3/3 + \dots$  und Abbruch der Entwicklung nach dem ersten Term führt auf folgende lineare Differentialgleichung, s.a. Anhang C,

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0.$$

□

### 1.1.2 Lagrange

Die Modellbildung nach Newton und Euler hat den Nachteil, daß Sie bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden die Teilsysteme freischneiden und ihre Reaktionskräfte bestimmen müssen, die als innere Kräfte und Momente dann in den Bewegungsgleichungen garnicht explizit auftreten. Dieser Umstand haftet der Methode nach Lagrange<sup>5</sup> nicht an. Es wird die kinetische Energie  $T = T(\dot{x}, x)$  und die potentielle Energie  $U = U(x)$  und die Lagrange-Funktion  $L = L(\dot{x}, x)$  als deren Differenz gebildet:

$$L(\dot{x}, x) = T(\dot{x}, x) - U(x),$$

und dann erhält man die Bewegungsgleichungen aus den Gleichungen 2. Art von Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i(t)} - \frac{\partial L}{\partial x_i(t)} = f(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1.3)$$

mit  $n$  der Anzahl der beteiligten Teilsysteme.

*Beispiel 2 Für das in Abb. 1.1 dargestellte mechanische System mit den beiden Freiheitsgraden  $x_1$ , der Position der Masse  $m$ , und  $x_2$ , der Winkelauslenkung des Schwungrades, seien die Bewegungsgleichungen nach der Methode von Lagrange herzuleiten.*

*Die kinetische Energie des Systems ist*

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{x}_2^2,$$

*die potentielle Energie*

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(rx_2 - x_1)^2,$$

---

<sup>5</sup>Joseph Louis Lagrange (1736–1813), lebte und wirkte in Turin, Berlin und Paris. Bedeutende Beiträge zur Mechanik, Himmelsmechanik, Differentialgleichungen und Variationsrechnung.

---

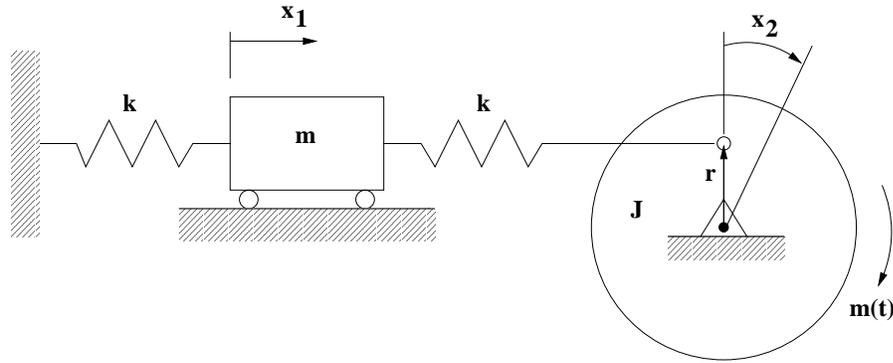


Abbildung 1.1: Mechanisches System

und daraus folgt unter Anwendung von Gl. (1.1.3) mit  $n = 2$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kr x_2 &= 0, \\ J\ddot{x}_2 - kr x_1 + kr^2 x_2 &= m(t). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 1 Verifizieren Sie das Ergebnis mit Bleistift auf Papier.

□

Enthält das betrachtete System eine zeitinvariante Dissipationsfunktion  $F(\dot{x})$ , dann wird diese in Gl. (1.1.3) durch den Term  $\partial F/\partial \dot{x}$  berücksichtigt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i(t)} - \frac{\partial L}{\partial x_i(t)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i(t)} = f(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1.4)$$

Beispiel 3 In Beispiel 2 werde zwischen Masse  $m$  und Schwungrad  $J$  ein Dämpfer mit dem Dämpfungsbeiwert  $c$  eingefügt. Unter der Voraussetzung viskoser Dämpfung (s.a. Abschnitt 2.2 auf S. 17) läßt sich eine Dissipationsfunktion  $F = c(r\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2/2$  formulieren.

Aufgabe 2 Stellen Sie für dieses Beispiel die Bewegungsgleichungen auf.

## 1.2 Harmonische Bewegung

Die Lösungen der Bewegungsgleichungen in Abschnitt 1.1 führen regelmäßig auf harmonische Schwingungen, die deshalb im folgenden kurz charakterisiert werden sollen. Grundlegend für die Beschreibung der Bewegung mechanischer Systeme ist die harmonische Bewegung, wie sie entsteht, wenn sich ein Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einem Kreis mit Radius  $A$  bewegt und die Ordinate  $x(t) = A \sin \omega t$  des Punktes über der Abszisse  $\omega t$  aufgetragen wird, s.a. Abb. 1.2.

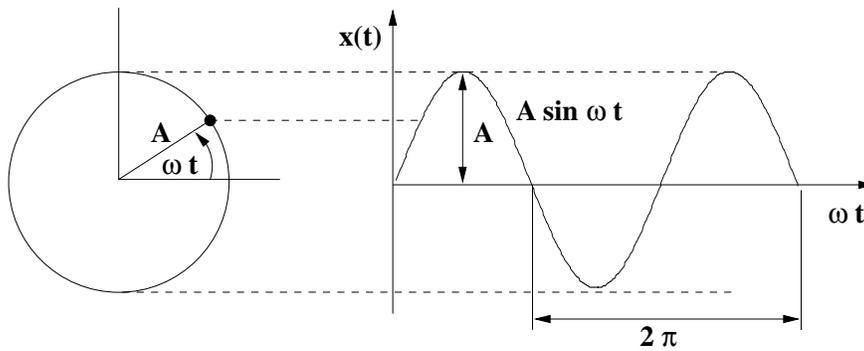


Abbildung 1.2: Harmonische Bewegung

In Abb. 1.3 ist eine abklingende (gedämpfte) harmonische Bewegung einer Masse  $m$ , die über eine elastische Feder und einen viskosen Dämpfer inertial fest aufgehängt ist und die eine Lichtquelle trägt, auf ein lichtempfindliches Papier projiziert, das an der Anordnung mit konstanter Geschwindigkeit vorbeiläuft [48].

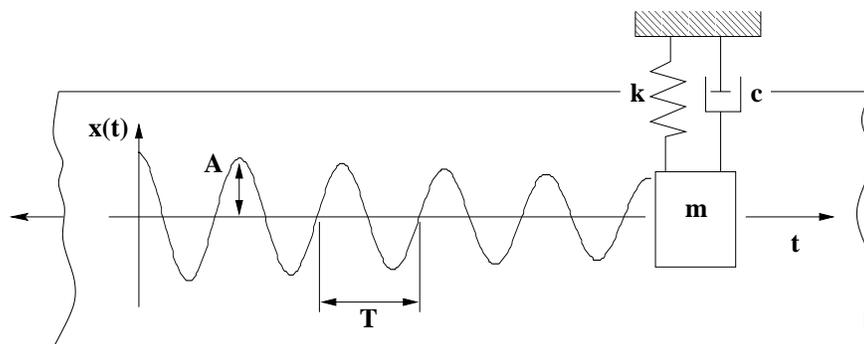


Abbildung 1.3: Gedämpfte harmonische Bewegung

Viele dynamische Bewegungen laufen nicht harmonisch, aber doch periodisch, d.h. gleichmäßig sich mit einer Periode  $T$  wiederholend, ab. Solche periodischen Vorgänge lassen sich über die Entwicklung in Fourier-Reihen durch harmonische approximieren, siehe dazu Anhang A.1.

### 1.2.1 Begriffe

Die harmonische Bewegung wird nach Abb. 1.3 durch die Auslenkung  $x(t)$

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (1.2.1)$$

der Masse beschrieben, wobei  $A$  die Amplitude und  $\omega$  die Kreisfrequenz, gemessen in rad/s, ist. Die Dauer einer Schwingungsperiode ist  $T$ , und der Zusam-

menhang zwischen Kreisfrequenz, Frequenz  $f$  und Schwingungsdauer ist

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2.2)$$

Die Frequenz ist definiert durch  $f = 1/T$  und wird in  $\text{Hz}=1/\text{s}$  gemessen.

### 1.2.2 Beschreibung

Wir sind nicht nur an der Auslenkung  $x$  sondern auch an der Geschwindigkeit  $\dot{x}$

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos \omega t = \omega A \sin(\omega t + \pi/2) \quad (1.2.3)$$

und der Beschleunigung  $\ddot{x}$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) \quad (1.2.4)$$

der Masse interessiert, und wir beobachten jeweils eine Phasenverschiebung von  $\pi/2$  zwischen diesen Größen. Zwischen Auslenkung und Beschleunigung besteht folgender Zusammenhang:<sup>6</sup>

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad (1.2.5)$$

die Beschleunigung ist der Auslenkung proportional und zeigt in Richtung auf den Ursprung der Bewegung, die Gleichgewichtslage.

Mit Hilfe der Euler-Identität

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi \quad (1.2.6)$$

kann die harmonische Bewegung in der komplexen Größe  $z$

$$\begin{aligned} z(t) &= A e^{j\omega t} \\ &= A \cos \omega t + jA \sin \omega t \\ &= x + jy \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

ausgedrückt werden.

*Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß die Beziehung (1.2.7) die Differentialgleichung (1.2.5) erfüllt.*

□

Die zu  $z$  konjugiert komplexe Größe ist

$$z^* = A e^{-j\omega t},$$

und der Realteil von  $z$  ist

$$\Re(z) = \frac{z + z^*}{2} = A \cos \omega t.$$

Zur Wiederholung des Rechnens mit komplexen Zahlen hilft folgende

<sup>6</sup>Gl. (1.2.5) ist die erste, eine Bewegung beschreibende, Differentialgleichung in diesem Compendium.

Regel 1 Für  $z_1 = A_1 e^{j\phi_1}$ ,  $z_2 = A_2 e^{j\phi_2}$  und  $z = x + jy$  gilt die Multiplikation:

$$z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}, \quad (1.2.8)$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}, \quad (1.2.9)$$

Potenzbildung:

$$z^n = A^n e^{jn\phi} \quad z^{1/n} = A^{1/n} e^{j\phi/n}, \quad (1.2.10)$$

Betrag  $A$  und Winkel  $\phi$ :

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.2.11)$$

□

## 1.3 Definitionen

Die wichtigsten schwingungstechnischen Definitionen sind hier zusammengestellt:

### 1.3.1 Zeitbereich

Der stationäre Mittelwert  $\bar{x}$  einer Schwingung  $x(t)$  ist

Mittelwert:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.3.1)$$

der Mittelwert einer Halb-Periode einer Sinus-Schwingung ist

$$\bar{x} = \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \sin t dt = 2 \frac{A}{\pi}.$$

Der quadratische Mittelwert  $\bar{x}^2$  ist

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (1.3.2)$$

beispielsweise ist für  $x(t) = A \sin \omega t$  der quadratische Mittelwert

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} A^2.$$

Aufgabe 4 Überprüfen Sie dieses Ergebnis a) mit Bleistift und Papier, b) mit einem CAS-System, z.B. Maple oder MuPAD.

□

Von Bedeutung ist ebenfalls die Quadratwurzel des quadratischen Mittelwerts<sup>7</sup>

$$\text{rms} = \sqrt{\bar{x}^2}. \quad (1.3.3)$$

Im vorangegangenen Beispiel  $\text{rms} = A/\sqrt{2}$ .

<sup>7</sup>Englisch: root mean square (rms).

### 1.3.2 Frequenzbereich

Dezibel: Das Dezibel<sup>8</sup> ist ein logarithmisches Maß des Verhältnisses zweier Leistungen:

$$\text{db} = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

oder mit einem Ergebnis aus Beispiel 6, das besagt, daß die Leistung proportional der Amplitude ist,

$$\text{db} = 10 \log_{10} \frac{x_1^2}{x_2^2} = 20 \log_{10} \frac{x_1}{x_2}. \quad (1.3.4)$$

Beispielsweise ist eine Amplitudenvergrößerung von  $x_1/x_2 = 6$  gemessen in Dezibel  $\text{db} = 15.56$ .

Oktave: Die Oktave ist eine Bezeichnung für die Bandbreite einer Schwingung. Wenn die obere Grenzfrequenz doppelt so groß ist wie die untere, dann deckt das Frequenzspektrum eine Oktave ab.

Beispiel: Der Frequenzbereich erstreckt sich von 250 Hz bis 500 Hz, dann ist die Bandbreite  $500 - 250 = 250$  Hz oder eine Oktave.

Zwei Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  sind  $n$  Oktaven voneinander getrennt, wenn

$$\frac{f_1}{f_2} = 2^n \quad \text{oder} \quad n = \log_2 \frac{f_1}{f_2} \quad (1.3.5)$$

gilt.

## 1.4 Physikalische Ersatzsysteme

Physikalische Ersatzsysteme sind äquivalente Massen, Federkonstanten, Dämpfer, etc.<sup>9</sup>

### 1.4.1 Federkonstanten

#### 1.4.1.1 Addition

Zwei oder mehrere ( $n$ ) parallel geschaltete Federn mit den Steifigkeiten  $k_i$  haben als äquivalente Federkonstante  $k$  die Summe der  $k_i$ :

$$k = \sum_{i=1}^n k_i, \quad (1.4.1)$$

<sup>8</sup>Das Dezibel ist nach G. A. Bell, dem Gründer der Bell Company, später AT&T, benannt.

<sup>9</sup>Dieser Abschnitt wird im Laufe des Semesters ergänzt. Einige Formeln sind schon im Text verwendet, ohne hier zu erscheinen, s.z.B. Gl. (2.1.12).

bei  $n$  hintereinandergeschalteten Federn berechnet sich die äquivalente Federkonstante aus den Kehrwerten:

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}, \quad (1.4.2)$$

oder

$$k = \frac{\prod_{i=1}^n k_i}{\sum_{i=1}^n k_i}. \quad (1.4.3)$$

#### 1.4.1.2 Balken und Stäbe

Zugstab mit Länge  $l$ , Querschnitt  $A$  und Elastizitätsmodul  $E$ :

$$k = \frac{EA}{l} \quad (1.4.4)$$

Torsionsstab mit Länge  $l$ , Querschnitt  $A$  und Elastizitätsmodul  $E$ :

Balken, eingespannt-frei gelagert, Länge  $l$ , Flächenträgheitsmoment  $I$ , Elastizitätsmodul  $E$ , Last am freien Ende:

$$k = \frac{3EI}{l^3} \quad (1.4.5)$$

---



# Kapitel 2

## Ein-Freiheitsgrad-Systeme

### 2.1 Ungedämpfte Eigenbewegung

Die Bewegungsgleichung eines dynamischen ungedämpften Feder-Masse-Systems mit einem longitudinalen Freiheitsgrad<sup>1</sup> ohne äußere Anregung lautet (Hookesches Gesetz:  $f_k = -kx(t)$ ):

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (2.1.1)$$

mit gegebenen Anfangswerten<sup>2</sup>  $x_0$  und  $\dot{x}_0$ .

Die detaillierte Herleitung soll anhand Abb. 2.1 erfolgen. In der statischen Gleichgewichtsposition hält die Federkraft  $k\Delta$  dem Gewicht  $W = mg$  das Gleichgewicht.

$$k\Delta = W = mg.$$

Newtons zweites Gesetz auf die Konfiguration angewandt ergibt

$$m\ddot{x}(t) = \sum f(t) = W - k[\Delta + x(t)],$$

und daraus folgt Gl. (2.1.1).

#### 2.1.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Die Lösung der Bewegungsgleichung<sup>3</sup> wird über den Ansatz<sup>4</sup>

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.1.2)$$

---

<sup>1</sup>Die folgenden Überlegungen gelten ganz analog für Systeme mit einem rotatorischen Freiheitsgrad:  $J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$ .

<sup>2</sup>Anstelle von  $\dot{x}_0$  kann auch ein Funktionswert  $x(t = t_1) = x_1$  vorgeschrieben sein. Gl. (2.1.1) beschreibt dann nicht mehr ein Anfangswertproblem, sondern ein Randwertproblem. Randwertprobleme sind i.a. viel schwieriger zu lösen als Anfangswertprobleme[28].

<sup>3</sup>Differentialgleichungen, in denen die Zeit nur implizit vorkommt, heißen autonom.

<sup>4</sup>In Gl. (2.1.1) wird die Summe einer Funktion und ihrer zweiten Ableitung gebildet, d.h. der Ansatz muß in Funktion und Ableitungen gleiche Funktionsanteile enthalten; genau das tut die Exponentialfunktion.

Merke:Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, in denen die Zeit  $t$  nicht explizit erscheint, haben immer Exponentialfunktionen als alleinige Lösungskomponenten.

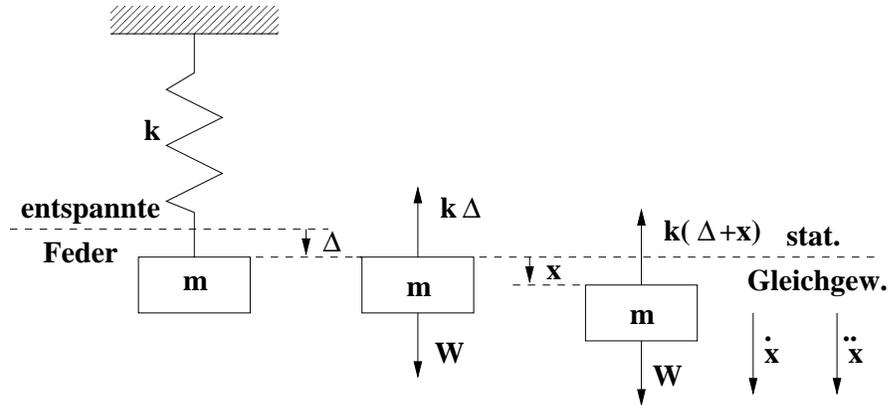


Abbildung 2.1: Feder-Masse-System mit freigeschnittener Masse

gewonnen, in dem  $C$  und  $s$  aus den Anfangswerten zu bestimmende Parameter darstellen. Der Ansatz wird zweimal differenziert und in die Bewegungsgleichung eingesetzt:

$$C e^{st} (ms^2 + k) = 0,$$

und da dies für alle  $t$  und beliebige  $C$  gelten muß, ist<sup>5</sup>

$$ms^2 + k = 0, \quad (2.1.3)$$

die sogenannte charakteristische Gleichung, aus der

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1.4)$$

folgt. Der Ausdruck<sup>6</sup>

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1.5)$$

▽ wird als die natürliche (ungedämpfte) Frequenz des Systems bezeichnet. Diese wird experimentell wie folgt ermittelt:

Aus der statischen Auslenkung  $\Delta$  der Feder, s.a. Abb. 2.1, und der Masse  $m$  wird zunächst die Federkonstante  $k$  bestimmt:

$$k = \frac{mg}{\Delta}$$

→ Experiment

und diese dann in Gl. (2.1.5) eingesetzt:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}.$$

Damit erhält man auch die Periode  $T_n = 1/f_n$  der Eigenschwingung:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{g}}.$$

<sup>5</sup>Die Lösung für  $C = 0$  wird triviale Lösung genannt und interessiert uns nicht.

<sup>6</sup>Oft findet man in der Literatur auch  $\omega_0$  statt  $\omega_n$ .

Die beiden Lösungen (2.1.4) der charakteristischen Gleichung (2.1.3) heißen charakteristische oder Eigenwerte des Systems. Mit ihnen ist die allgemeine Lösung der Dgl. (2.1.1)

$$x(t) = C_1 e^{j\omega_n t} + C_2 e^{-j\omega_n t}, \quad (2.1.6)$$

mit aus den Anfangswerten zu bestimmenden konjugiert komplexen Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ , oder unter Verwendung der Euler-Identität  $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t, \quad (2.1.7)$$

wobei  $A_1$  und  $A_2$  wiederum aus den Anfangswerten wie folgt zu bestimmen sind:

$$x(0) = A_1 = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega_n A_2 = \dot{x}_0$$

und damit

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}.$$

In die Lösung (2.1.7) eingesetzt wird

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.1.8)$$

als allgemeine Lösung erhalten.

Zwischen den Konstanten  $A_i$  und  $C_i$  besteht folgende Beziehung:

$$A_1 = C_1 + C_2, \quad \text{und} \quad A_2 = j(C_1 - C_2).$$

*Aufgabe 5 Leiten Sie diese Beziehung her; und schreiben Sie sich  $C_i = f(A_i)$  in den Margin.*

□

## 2.1.2 Bewegungsformen

Die allgemeine Lösung (2.1.8) stellt eine harmonische Schwingung dar, deswegen ist das durch Gl. (2.1.1) beschriebene System ein harmonischer Oszillator.

### 2.1.2.1 Anfangsbedingungen

Gl. (2.1.8) beschreibt die Bewegung der Masse  $m$  um ihre statische Gleichgewichtslage. Eine (Eigen-)Bewegung kommt nur zustande, wenn mindestens eine der beiden Anfangsbedingungen von Null verschieden sind.

Für  $\dot{x}_0 = 0$  ergibt sich

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t$$

und für  $x_0 = 0$

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t.$$

Der Einfluß der Anfangswerte auf die Lösung  $x(t)$  ist in Abb. 2.3 für  $\omega_n = 1$  dargestellt. Sie erkennen deutlich die unterschiedlichen Amplituden der Schwingungen.

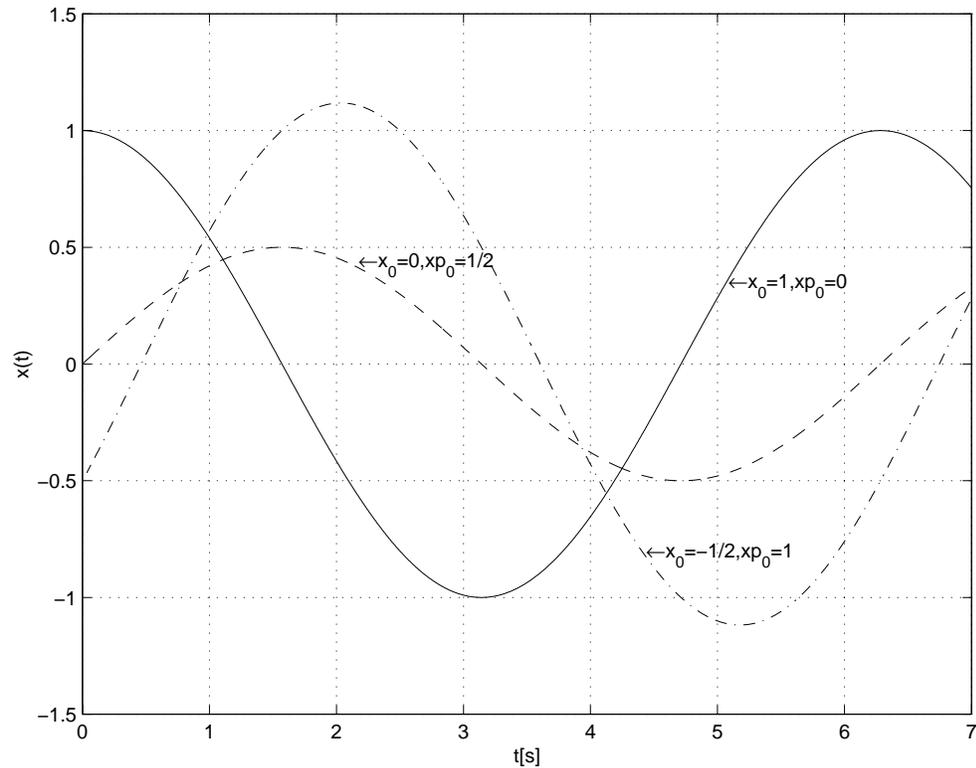


Abbildung 2.2: Einfluß der Anfangswerte

### 2.1.2.2 Winkeladdition

Unter Verwendung der Additionstheoreme für Winkelfunktionen kann die Lösung (2.1.7) in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (2.1.9)$$

dargestellt werden, wobei mit  $A_1 = A \cos \phi$  und  $A_2 = A \sin \phi$  der Ausdruck  $A$  die Amplitude

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

und  $\phi$  der Phasenwinkel

$$\phi = \arctan \frac{A_2}{A_1} = \arctan \frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}$$

sind.

Analog zu Gl. (2.1.9) ist

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \psi), \quad (2.1.10)$$

mit der Amplitude  $A$  wie oben und

$$\psi = \arctan \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0}$$

### 2.1.2.3 Phasenportrait

Ein- bzw. zweimalige Differentiation der Lösung (2.1.9) ergeben die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \phi) = \omega_n A \cos(\omega_n t - \phi + \pi/2)$$

und die Beschleunigung

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi) = \omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi + \pi),$$

woraus zu entnehmen ist, daß die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  der Auslenkung  $x$  um den Winkel  $\pi/2$  und die Beschleunigung  $\ddot{x}$  um den Winkel  $\pi$  vorausseilt.

Die Darstellung von  $\dot{x}$  als Funktion von  $x$  wird als Phasendiagramm bezeichnet. Aus der Beziehung  $\cos^2(\omega_n t - \phi) + \sin^2(\omega_n t - \phi) = 1$  erhält man mit

$$\cos(\omega_n t - \phi) = \frac{x(t)}{A}$$

und mit

$$\sin(\omega_n t - \phi) = -\frac{\dot{x}(t)}{A\omega_n}$$

das Phasendiagramm einer Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{(A\omega_n)^2} = 1.$$

## 2.1.3 Beispiele

### 2.1.3.1 Manometer-Schwingung

In einem Manometer nach dem Prinzip geneigter kommunizierender Röhren schwingt eine Flüssigkeitssäule ungedämpft. Die Länge der Flüssigkeitssäule sei  $L$ , der Querschnitt  $A$ . Wie groß ist die natürliche Frequenz  $\omega_n$  der Flüssigkeitsschwingung?

Lösung: Die Bewegungsgleichung lautet[40]

$$m\ddot{x} = \sum f_x,$$

d.h.

$$LA\rho\ddot{x} = -2Ax\rho g$$

oder vereinfacht

$$\ddot{x} + \frac{2g}{L}x = 0$$


---

und daraus ergibt sich

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}}.$$

### 2.1.3.2 Strukturschwingung

Ein (masselos) angenommener einseitig eingespannter Balken der Länge  $l$  trägt auf seinem freien Ende eine Masse  $m$ , die eine statische Durchbiegung  $x$  des freien Endes bewirkt. Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz der Anordnung?

Lösung: Die Auslenkung eines Kragbalkens unter einer Punktlast am Ende ist

$$x = \frac{mg}{k}$$

mit der Balkensteifigkeit

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

mit  $E$  dem Elastizitätsmodul und  $I$  dem Flächenträgheitsmoment des Balkens.

Damit ist

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} = \sqrt{\frac{g}{x}}. \quad (2.1.11)$$

### 2.1.3.3 Torsionsschwingung

Ein Rad hängt an einer eingespannten Welle mit Durchmesser  $d$  und Länge  $l$ . Das Rad wird aus seiner statischen Gleichgewichtslage ausgelenkt und vollführt in  $t_1$  Sekunden  $n$  Schwingungen. Bestimmen Sie das polare Trägheitsmoment  $J$  des Rades.

Lösung: Die Bewegungsgleichung ist

$$J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0.$$

Die Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  berechnet sich aus der Anzahl der Schwingungen in der gegebenen Zeit:

$$\omega_n = 2\pi \frac{n}{t_1}.$$

Die Torsionssteifigkeit der Welle ist

$$k_t = \frac{G\pi d^4}{32l} \quad (2.1.12)$$

mit  $G$  dem Schermodul des Wellenmaterials.

Aus der Bewegungsgleichung folgt

$$J = \frac{k_t}{\omega_n^2} = \frac{Gd^4 t_1^2}{128\pi n^2}.$$

- Aufgabe 6 1) Überprüfen Sie die Dimensionen des Resultats!  
 2) Warum hat die Amplitude der Auslenkung keinen Einfluß?  
 3) Rechnen Sie ein Beispiel mit realistischen Zahlenwerten!

□

## 2.2 Gedämpfte Eigenbewegung

Zunächst soll der einfache Fall der viskosen (geschwindigkeitsproportionalen) Dämpfung untersucht werden. Zusätzlich zur Federkraft tritt hier die Dämpfungskraft  $f_c = -c\dot{x}(t)$ , so daß die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (2.2.1)$$

lautet.

### 2.2.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Zur Lösung der Bewegungsgleichung (2.2.1) wird wieder der Ansatz (2.1.2)  $x(t) = Ce^{st}$  herangezogen. Die charakteristische Gleichung ergibt sich hier nach  $(ms^2 + cs + k)Ce^{st} = 0$  zu

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad (2.2.2)$$

und deren Lösungen sind:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (2.2.3)$$

und damit ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (2.2.1)

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}, \quad (2.2.4)$$

worin die  $C_i$  wieder aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Der Lösungsgraph (2.2.4) hängt entscheidend vom Radikanden in Gl. (2.2.3) ab. Wird dieser Null,  $(c_k/2m)^2 - k/m = 0$ , dann wird  $c_k$

$$c_k = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

die *kritische Dämpfungskonstante* genannt. Das Verhältnis einer beliebigen Dämpfungskonstanten  $c$  zur kritischen  $c_k$  wird als Dämpfungsverhältnis

Dämpfungsverhältnis  $\zeta$ 

$$\zeta = \frac{c}{c_k} \quad (2.2.5)$$

bezeichnet.

Mit  $\omega_n$  und  $\zeta$  kann Gl. (2.2.1) nach Division durch  $m$  auch in der Form

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (2.2.6)$$



geschrieben werden, wobei nun die drei Parameter  $m, c, k$  durch nur zwei,  $\omega_n, \zeta$ , ersetzt sind.

Das Dämpfungsverhältnis wird in die Beziehung (2.2.3) eingesetzt:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n, \quad (2.2.7)$$

und damit wird als Lösung (2.2.4)

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.2.8)$$

erhalten. Setzt man das Dämpfungsverhältnis  $\zeta$  und die Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  in die Systemgleichung (2.2.1) ein, dann erhält man die häufig verwendete Darstellung

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (2.2.9)$$

und entsprechende Anfangsbedingungen.

## 2.2.2 Bewegungsformen

In Abhängigkeit von  $\zeta$  werden nun die unterschiedlichen Lösungsformen dieser Gleichung diskutiert:

1.  $\zeta = 0$ : Ungedämpfte Schwingung,
2.  $\zeta = 1$ : Kritisch gedämpfte Schwingung,
3.  $0 < \zeta < 1$ : Unterdämpfte Schwingung,
4.  $\zeta > 1$ : Überdämpfte Schwingung.

### 2.2.2.1 Ungedämpfte Schwingung

Der Fall  $\zeta = 0$  führt auf ungedämpfte Schwingungen des Abschnitts (2.1). Hier soll die Lösung (2.1.8) durch Anwendung der Laplace-Transformation[36], s.a. Anhang A.2, gewonnen werden. Die Laplace-Transformation der homogenen Differentialgleichung  $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$  oder, nach Division durch  $m$ ,

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

Merke:  $x(t) \longleftrightarrow X(s)$  lautet

$$s^2 X(s) - sx_0 - \dot{x}_0 + \omega_n^2 X(s) = 0,$$

und nach  $X$  aufgelöst:

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} x_0 + \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \dot{x}_0.$$

Die inverse Laplace-Transformation dieses Ausdrucks ergibt mit Zeile 23 und 24 der Tab. A.1

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

wie nach Ergebnis (2.1.8) zu erwarten war.

## 2.2.2.2 Kritische Dämpfung

Im Falle von  $\zeta = 1$ , der kritischen Dämpfung, fallen die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.2.2) zusammen:

$$s_{1,2} = -\frac{c_k}{2m} = -\omega_n,$$

dementsprechend lautet die Systemgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0.$$

Deren Lösung soll wieder durch Anwendung der Laplace-Transformation berechnet werden:

$$s^2 X(s) - s x_0 - \dot{x}_0 + 2\omega_n s X(s) - 2\omega_n x_0 + \omega_n^2 X(s) = 0,$$

und nach  $X$  aufgelöst:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\dot{x}_0 + s x_0 + 2\omega_n x_0}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{s}{(s + \omega_n)^2} x_0 + \frac{1}{(s + \omega_n)^2} (\dot{x}_0 + 2\omega_n x_0). \end{aligned}$$

Die inverse Laplace-Transformation führt zu

$$x(t) = (x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t) e^{-\omega_n t}. \quad (2.2.10)$$

*Aufgabe 7 Vollziehen Sie die inverse Laplace-Transformation im einzelnen mit Bleistift auf Papier mit Hilfe der Tab. A.1 nach!*

□

## 2.2.2.3 Unterdämpftes System

Im Fall des unterdämpften Systems  $0 < \zeta < 1$  wird die Diskriminante der Lösung der charakteristischen Gleichung (2.2.7) negativ, deshalb kann diese Lösung auch als

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right) \omega_n \quad (2.2.11)$$

geschrieben werden. Damit wird die Lösung (2.2.8) der Systemgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left( C_1 e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} \right) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left( (C_1 + C_2) \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right. \\ &\quad \left. + j(C_1 - C_2) \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left( A_1 \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + A_2 \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) \\ &= A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi) \quad (2.2.12) \\ &= A e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \psi) \quad (2.2.13) \end{aligned}$$

wobei  $A_1$  und  $A_2$  oder  $A$  und  $\phi$  oder  $\psi$  aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstanten sind. Ersteres Paar ist

$$A_1 = x_0$$

und

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d},$$

wobei, mit

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n \quad (2.2.14)$$

der Frequenz der gedämpften Schwingung, die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (2.2.15)$$

ist. Analog zu Abschnitt 2.1.2 sind die Amplitude  $A$  als

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2}$$

und der Phasenwinkel  $\phi$  als

$$\phi = \arctan \frac{A_2}{A_1} = \arctan \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0 \omega_d}$$

und  $\psi$  als

$$\psi = \arctan \frac{A_1}{A_2} = \arctan x_0 \omega_d \dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0$$

ermittelbar.

In Abb. 2.3 ist der Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Lösung  $x(t)$  für  $\omega_n = 1$  und  $\zeta = 1/5$  dargestellt. Der Eingabe-File für `Matlab`[47] ist nachfolgend eingerückt.

Gedämpfte freie Schwingung Gl. (2.2.15), Einfluß der Anfangsbedingungen:

```

wn=1;
z=1/5;
wd=sqrt(1-z^2)*wn;
t=linspace(0,20,2000);
x0=1;
x0p=0;
A1=x0;
A2=(x0p+z*wn*x0)/wd;
x1=exp(-z*wn.*t).*(A1.*cos(wd.*t)+A2.*sin(wd.*t));
x0=0;
x0p=1;
A1=x0;
A2=(x0p+z*wn*x0)/wd;
x2=exp(-z*wn.*t).*(A1.*cos(wd.*t)+A2.*sin(wd.*t));

```

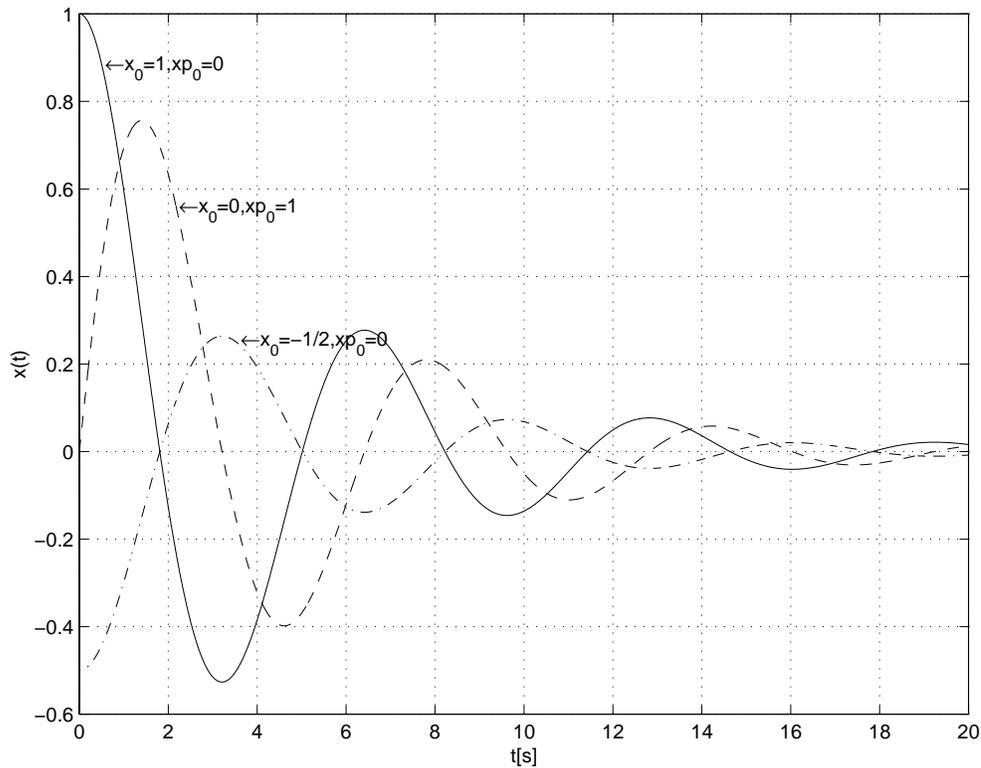


Abbildung 2.3: Einfluß der Anfangsbedingungen

```

x0=-1/2;
x0p=0;
A1=x0;
A2=(x0p+z*wn*x0)/wd;
x3=exp(-z*wn.*t).*(A1.*cos(wd.*t)+A2.*sin(wd.*t));
plot(t,x1,'k-',t,x2,'k--',t,x3,'k-.')
grid
xlabel('t[s]')
ylabel('x(t)')
gtext('\leftarrow x_0=1,xp_0=0')
gtext('\leftarrow x_0=0,xp_0=1')
gtext('\leftarrow x_0=-1/2,xp_0=0')

```

Abb. 2.4 zeigt den Einfluß der Dämpfung,  $\zeta \in \{1/5, 1/3, 1/2\}$ , auf das Systemverhalten.

*Aufgabe 8* Untersuchen Sie anhand der Abb. 2.4 den Einfluß der Dämpfung auf die Schwingungsdauer  $T$ . Begründen Sie Ihre Erfahrung durch die Theorie.

□

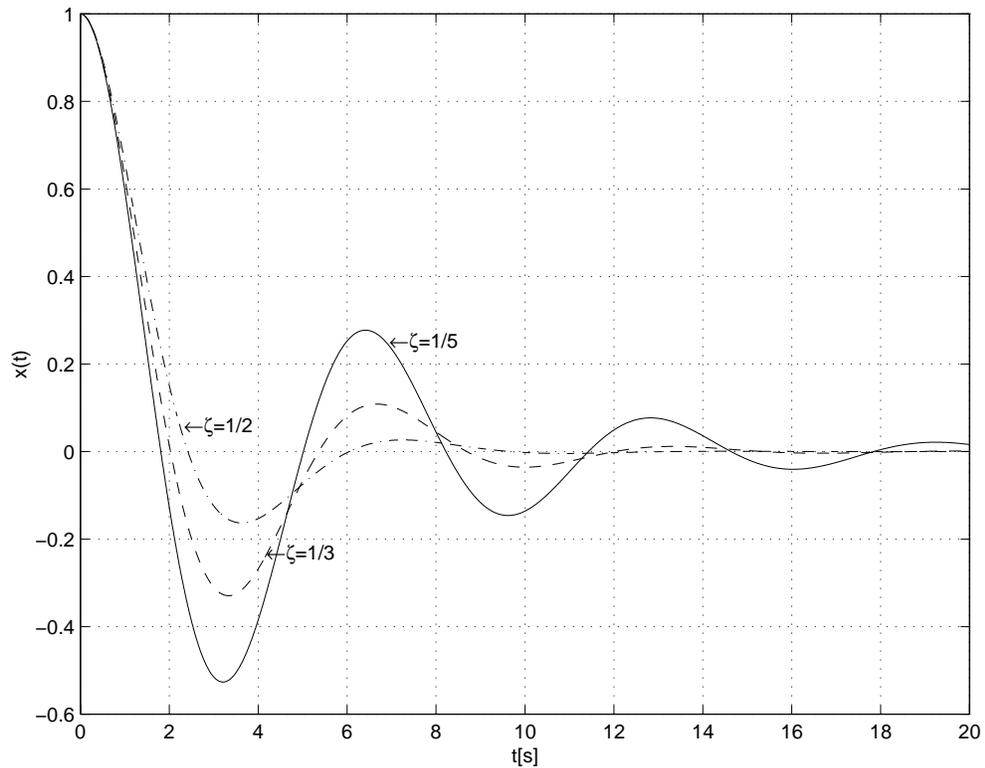


Abbildung 2.4: Einfluß der Dämpfung

#### 2.2.2.4 Überdämpftes System

Im Falle des überdämpften Systems,  $\zeta > 1$ , ist  $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$  und damit sind die Wurzeln (2.2.7) der charakteristischen Gleichung

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n$$

reel und unterschiedlich, und es gilt  $s_2 < s_1 < 0$ . Die Lösung der Bewegungsgleichung ist

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t}, \quad (2.2.16)$$

eine exponentiell abnehmende, aperiodische Bewegung, wobei die Konstanten

$$C_1 = \frac{x_0 \omega_n (+\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

und

$$C_2 = \frac{x_0 \omega_n (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

wieder aus den Anfangsbedingungen  $x_0$  und  $\dot{x}_0$  berechnet werden.

Beispiel 4 Die Anfangsbedingungen können sehr einfach mit einem CAS-System symbolisch ermittelt werden; hier z.B. mit `Maple`[35]. Gelöst wird folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n & (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung wird in folgender `Maple`-Sitzung gelöst:<sup>7</sup>

```
> with(linalg);
> assume(zeta>1);
> assume(w>0);
> A:=matrix([[1,1],[(-zeta + sqrt(zeta^2-1))*w,(-zeta - sqrt(zeta^2-1))*w]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (-\tilde{\zeta} + \sqrt{\tilde{\zeta}^2 - 1}) w^{\sim} & (-\tilde{\zeta} - \sqrt{\tilde{\zeta}^2 - 1}) w^{\sim} \end{bmatrix}$$

```
> b:=vector([x0,xp0]);
```

$$b := [x0 \ xp0]$$

```
> C:=linsolve(A,b);
```

$$C := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{xp0 + w^{\sim} \tilde{\zeta} x0 + w^{\sim} \sqrt{\tilde{\zeta}^2 - 1} x0}{w^{\sim} \sqrt{\tilde{\zeta}^2 - 1}} \\ -\frac{1}{2} \frac{w^{\sim} \tilde{\zeta} x0 - w^{\sim} \sqrt{\tilde{\zeta}^2 - 1} x0 + xp0}{\sqrt{\tilde{\zeta}^2 - 1} w^{\sim}} \end{bmatrix}$$

□

Aufgabe 9 Überprüfen Sie, ob `Maple` richtig ‘gerechnet’ hat!

□

## 2.2.3 Charakteristika

### 2.2.3.1 Stabilität

Wichtiges Merkmal eines dynamischen Systems ist seine Stabilität. Allgemeine Stabilitätsbedingungen werden im Anhang B angegeben. Für ein mechanisches System 2. Ordnung ist notwendig und hinreichend, daß alle Koeffizienten der charakteristischen Gleichung (hier  $m$ ,  $c$  und  $k$ ) gleiches Vorzeichen (hier ist physikalisch sinnvoll nur das positive) haben. Gleichbedeutend damit ist, daß gilt

<sup>7</sup>Die `assume`-Anweisung legt die Bedingungen  $\zeta > 1$  und  $\omega_n > 0$  fest, die im Zusammenhang dieses Abschnitts gefordert sind.



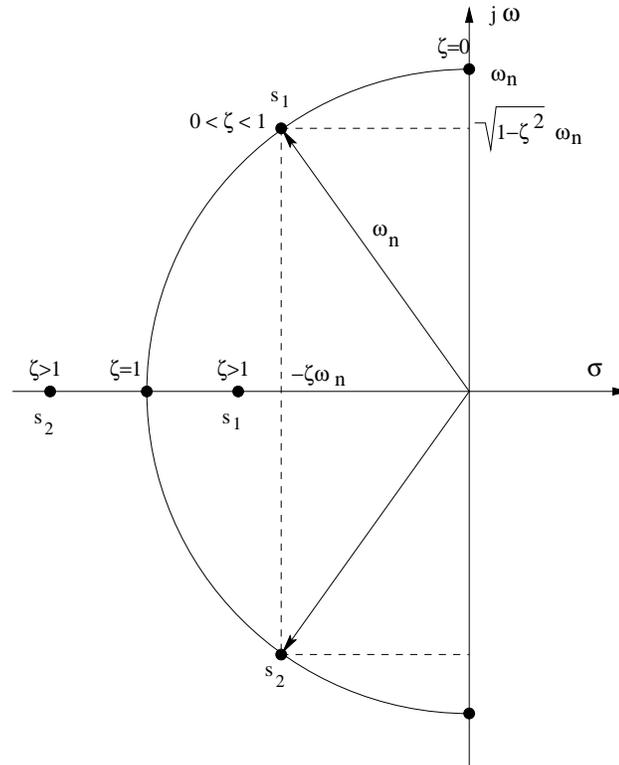


Abbildung 2.5: Lage der Pole

$$\Re(s_i) < 0, \quad \forall i,$$

wobei  $\Re(s)$  der Realteil der komplexen Größe  $s$  ist. D.h. die Nullstellen der charakteristischen Gleichung<sup>8</sup> müssen negativen Realteil haben. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.5 dargestellt für zwei Polpaare  $s_{1,2}$ , von denen eines auf dem Halbkreis mit Radius  $\omega_n$  liegt und eines auf der negativen reellen Achse.

### 2.2.3.2 Logarithmisches Dekrement

Aus der Kreisfrequenz  $\omega_d$  der gedämpften Schwingung wird deren Schwingungsdauer  $T_d$  zu

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

berechnet. Die periodische Amplitudenreduktion während einer Schwingungsdauer wird der Lösung (2.2.12) zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2 = t_1 + T_d$  entnommen:

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1 + T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}.$$

<sup>8</sup>Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung werden auch als Pole des Systems bezeichnet.

Das Verhältnis

$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \zeta \omega_n T_d = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.2.17)$$

wird als logarithmisches Dekrement bezeichnet. Für kleine  $\zeta \ll 1$  gilt approximativ

$$\delta \approx 2\pi\zeta.$$

Wenn durch Gleichung (2.2.17) das logarithmische Dekrement gegeben ist, dann kann daraus das Dämpfungsverhältnis berechnet werden:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}},$$

wobei für kleine  $\delta$  wieder die approximative Linearisierung

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi}$$

gilt. Mit diesen Beziehungen kann aus dem Graphen  $x(t)$  der Lösung das Dämpfungsverhältnis  $\zeta$  experimentell durch Auslesen zweier konsekutiver Werte  $x(t_1)$  und  $x(t_2)$  gewonnen werden. → Experiment

### 2.2.3.3 Energieverluste

Die zeitliche Änderung der Energie  $W$  ist das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit

$$\frac{d}{dt} W(t) = f v = -c \dot{x}^2(t), \quad (2.2.18)$$

und die dissipierte Energie  $\Delta W$  während einer Periode  $T_d$  ist

$$\Delta W = \int_0^{T_d} \frac{d}{dt} W(t) dt. \quad (2.2.19)$$

Für eine gedämpfte harmonische Bewegung sei  $x(t) = X \sin \omega_d t$  wird das Integral (2.2.19) zu

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_0^{T_d} c X^2 \omega_d^2 \cos^2 \omega_d t dt \\ &= \int_0^{2\pi} c X^2 \omega_d \cos^2 \omega_d t d(\omega_d t) \\ &= \pi c \omega_d X^2. \end{aligned}$$

Der Energieverlust ist proportional zum Quadrat der Bewegungsamplitude  $X$ ; weiterhin ist er abhängig von sämtlichen Systemparametern ( $\omega_n$ ,  $\zeta$ ).

### 2.2.4 Alternative Dämpfungsmodelle

Das breite Spektrum alternativer Dämpfungsmodelle[11] wird in einem Seminar im Studienschwerpunkt ‘Entwicklung und Versuch’ ausführlich behandelt. Hier soll zunächst nur auf den Einfluß trockener Reibung, der sog. Coulomb-Dämpfung, eingegangen werden.

## 2.2.4.1 Trockene Reibung

Die bisherige Modellbildung der Dämpfungskraft geht aus von der Vorstellung der Geschwindigkeitsproportionalität  $f_c(t) = c\dot{x}(t)$ . Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in der Tatsache, daß die Bewegungsgleichung linear ist, der Nachteil ist die geringere Realitätsnähe. Herrscht trockene Reibung vor mit einem Reibungskoeffizienten  $\mu$ , dann ist die Dämpfungskraft auch richtungsabhängig:

$$f_c = \begin{cases} \mu N & \dot{x} < 0, \\ 0 & \dot{x} = 0, \\ -\mu N & \dot{x} > 0, \end{cases}$$

dieser Dämpfungsansatz heißt Coulomb-Dämpfung, und mit ihm wird die Bewegungsgleichung (1.1.1) nichtlinear. Unter Einführung der Signum-Funktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

und mit  $N = mg$  wird die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \mu mg \text{sign}(\dot{x}) + kx = 0. \quad (2.2.20)$$

Diese Gleichung ist inhomogen, die Nichtlinearität ist einfach: die Gleichung ist abschnittsweise linear:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= -\mu mg & \text{für } \dot{x} > 0, \\ m\ddot{x} + kx &= 0 & \text{für } \dot{x} = 0 \end{aligned}$$

und

$$m\ddot{x} + kx = \mu mg \quad \text{für } \dot{x} < 0.$$

Damit wird auch die Lösung in Anlehnung an Gleichung (2.1.7) einfach

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu mg}{k} \quad \text{für } \dot{x} > 0, \quad (2.2.21)$$

und

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} \quad \text{für } \dot{x} < 0, \quad (2.2.22)$$

was durch Einsetzen in Gl. (2.2.20) nachprüfbar ist. Die Konstanten  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  werden wieder aus Anfangsbedingungen gewonnen. Diese seien zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$x(0) = x_0 > 0,$$

und

$$\dot{x}(0) = 0,$$

d.h. die Bewegung startet von 'rechts' nach 'links' und damit muß Gleichung (2.2.22) verwendet werden, aus der

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu mg}{k}$$


---

und

$$A_4 = 0$$

erhalten werden, und  $x(t)$  in der ersten Halbperiode wird

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k}. \quad (2.2.23)$$

Bei  $t = T/2 = \pi/\omega_n$  findet Richtungsumkehr der Masse  $m$  statt; jetzt gilt Gl. (2.2.21) mit Anfangsbedingungen aus Gl. (2.2.23) und  $t = \pi/\omega_n$

$$x_1 = x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = -x_0 + 2\frac{\mu mg}{k}$$

und

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = 0,$$

da bei Richtungsumkehr die Geschwindigkeit der Masse gerade Null ist.

Damit werden in der zweiten Halbperiode für  $\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$

$$A_1 = x_0 - 3\frac{\mu mg}{k}$$

und

$$A_2 = 0$$

und

$$x(t) = \left(x_0 - 3\frac{\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t - \frac{\mu mg}{k}. \quad (2.2.24)$$

Am Ende der zweiten Halbperiode ist

$$x_2 = x(2\pi/\omega_n) = x_0 - 4\frac{\mu mg}{k}$$

und  $\dot{x}(2\pi/\omega_n)$  wiederum Null. Dies sind die Anfangsbedingungen für den dritten Halbzyklus, für den wieder Gl. (2.2.22) zu wählen ist.

Und so fort, bis die Bewegung zum Stillstand kommt, was dann geschieht, wenn  $x_n \leq \mu mg/k$  ist, da dann die Rückstellkraft der Feder nicht mehr ausreicht, um die Reibungskraft  $\mu mg$  zu überwinden, d.h.

$$x_0 - n \frac{2\mu mg}{k} \leq \frac{\mu mg}{k}$$

oder nach

$$n = \frac{x_0 - \frac{\mu mg}{k}}{\frac{2\mu mg}{k}}$$

Halbperioden.

In jeder Halbperiode reduziert sich die Amplitude  $X$  der Schwingung um  $2\mu mg/k$ , d.h.

$$X_{i+1} = X_i - \frac{4\mu mg}{k},$$

d.h. sie reduziert sich linear mit der Zeit, im Gegensatz zur viskosen Dämpfung, bei der die Amplitude exponentiell abfällt, s.a. Gl. (2.2.15).

Aufgabe 10 Berechnen Sie die Steigung der Amplituden-Einhüllenden.

□

Eine Bewegung eines Massepunktes mit Coulomb-Dämpfung ist in Abb. 2.6 dargestellt.<sup>9</sup>

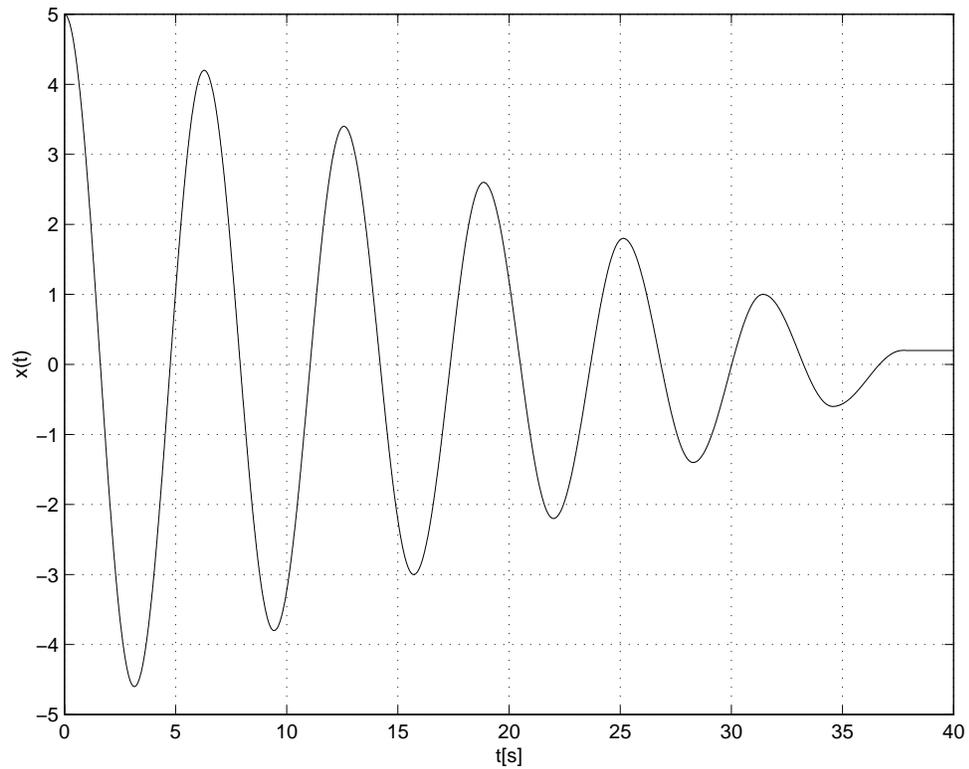


Abbildung 2.6: Einfluß der Coulomb-Dämpfung

## 2.3 Harmonische Anregung

Im vorangegangenen Kapitel wurden die freien Schwingungen eines mechanischen Systems untersucht. Das System wird dabei durch entsprechende Anfangs-

<sup>9</sup>Diese Abbildung wurde durch numerische Lösung der Differentialgleichung (2.2.20) im CAE-System Matlab[47] gewonnen. Dabei wurde der Differential-Equation-Editor dees benutzt, in dem die Dgl. zweiter Ordnung als System zweier Dgl. erster Ordnung eingegeben werden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k/mx_1 - \text{sgn}(x_2)\mu g.\end{aligned}$$

Aufgabe 11 Verifizieren Sie dieses System unter Verwendung der Hilfsmittel des Anhangs D.

□

sbedingungen aus seiner statischen Gleichgewichtslage gebracht und dann sich selbst überlassen. Es führt seine Eigenbewegung aus.

Nun soll dem System fortwährend Energie zugeführt werden; dann führt es angeregte oder erzwungene Schwingungen aus. Zunächst beschränken wir uns auf den Fall der harmonischen Anregung, die allgemein als

$$f(t) = F_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

oder

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (2.3.1)$$

formuliert wird, mit  $F_0$  der Amplitude,  $\omega$  der Frequenz und  $\phi$  dem Phasenwinkel. Wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  auch  $f(t) = 0$  ist, dann ist auch  $\phi = 0$ .

Wir werden nachweisen, daß harmonische Anregung immer eine harmonische Bewegung  $x(t)$  bewirkt, die sich jedoch i.a. in Amplitude und Phase von der Anregung unterscheidet. Wenn die anregende Frequenz  $\omega$  mit der Eigenfrequenz  $\omega_n$  des angeregten Systems zusammenfällt, dann überhöht sich die Amplitude  $X$  sehr stark, und es kann zu schweren Schäden am System führen. Man spricht von Resonanz.<sup>10</sup>

Die Bewegungsgleichung des fremd-erregten Systems lautet:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t). \quad (2.3.2)$$

Deren allgemeine Lösung wird superponiert aus der Lösung  $x_h(t)$  des homogenen Systems

$$m\ddot{x}_h(t) + c\dot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0$$

und der partikulären Lösung  $x_p(t)$  des angeregten Systems (2.3.2):

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Darin ist  $x_h$  für den transienten Teil der Lösung und  $x_p$  für deren stationären Anteil verantwortlich.

### 2.3.1 Harmonische Anregung des ungedämpften Systems

Für das ungedämpfte System wird die Bewegungsgleichung (2.3.2) mit der Anregung (2.3.1)

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (2.3.3)$$

oder

$$\frac{\ddot{x}(t)}{\omega_n^2} + x(t) = f_0 \cos \omega t,$$

wobei

$$f_0 = \frac{F_0}{k} = \Delta \quad (2.3.4)$$

---

<sup>10</sup>Resonanz von resonare (lat.) widerhallen.

die statische Auslenkung der Masse  $m$  durch die Kraft  $F_0$  ist.

Die homogene Lösung dieser Gleichung wurde in Abschnitt 2.1 ermittelt:

$$x_h(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t.$$

Die partikuläre Lösung genügt dem Ansatz

$$x_p(t) = A_0 \cos \omega t,$$

was man durch (zweimaliges) Differenzieren und Einsetzen in Gleichung (2.3.3) sofort sieht. Aus diesem Vorgang ergibt sich auch die Amplitude

$$A_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

und damit gleich die gesamte Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t. \quad (2.3.5)$$

Die Amplituden,  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , werden aus den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t = 0$ , nämlich  $x_0$  und  $\dot{x}_0$ , bestimmt:

$$A_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

und

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

und damit wird Gleichung (2.3.5) schließlich zu

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t. \quad (2.3.6)$$

Es ist leicht nachzuvollziehen, daß mit dem Verhältnis von Erreger- und Eigenkreisfrequenz

$$\eta = \omega/\omega_n$$

für das Amplitudenverhältnis  $A_0/f_0$

$$V(\eta) = \frac{A_0}{f_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - \eta^2} \quad (2.3.7)$$

gilt; in Abb. 2.7 ist  $V$  über  $\eta$  abgebildet. Das Amplitudenverhältnis  $V$  wird auch als Vergrößerungsfunktion bezeichnet.

Die Abbildung zeigt zwei Bereiche, die durch einen Pol bei  $\omega = \omega_n$  getrennt sind.

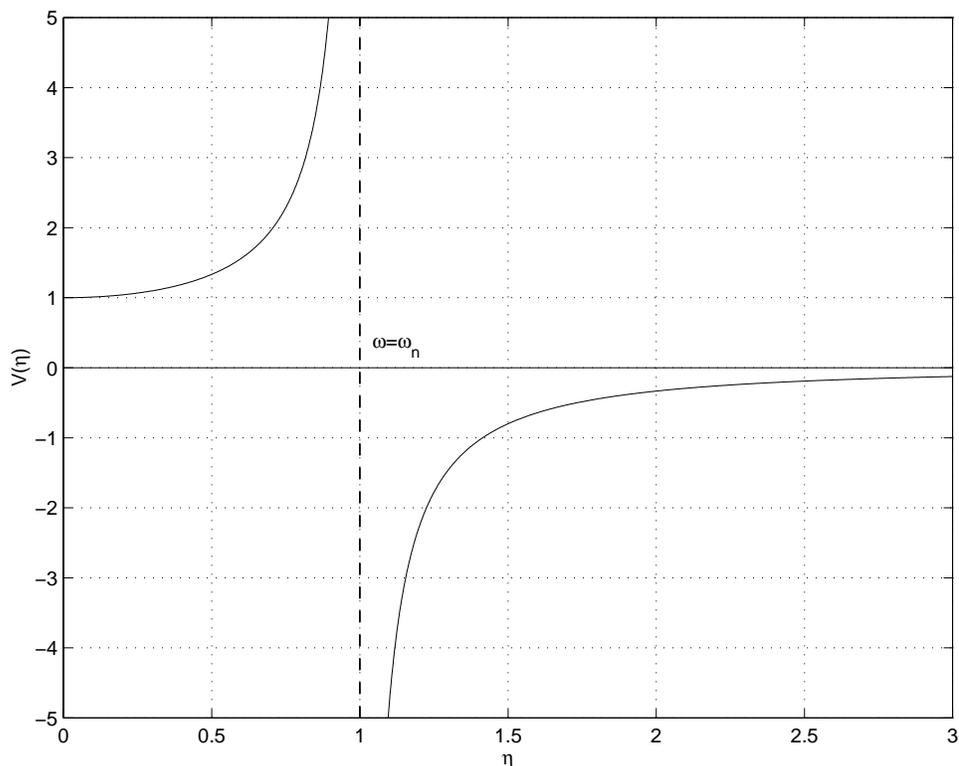


Abbildung 2.7: Vergrößerungsfunktion der ungedämpften Schwingung

2.3.1.1 Resonanz

$0 \leq \omega < \omega_n$  Mit dem Amplitudenverhältnis (2.3.7) wird Gleichung (2.3.6)

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{f_0}{1 - \eta^2} \cos \omega t; \quad (2.3.8)$$

es gilt  $\eta < 1$ , und  $x(t)$  berechnet sich nach (2.3.8) und  $V$  ist im linken Ast der Abb. 2.7 gezeichnet. Der Systemausgang  $x(t)$  ist in Phase mit dem Systemeingang  $f(t)$ .

Jetzt ist  $\eta > 1$ , und die partikuläre Lösung wird  $x_p(t) = -A_0 \cos \omega t$ , hier mit

$$\omega_n < \omega < \infty$$

$$A_0 = \frac{f_0}{\eta^2 - 1}$$

Das Amplitudenverhältnis ist im rechten Ast abgebildet. Für sehr große  $\omega$  tendiert  $A_0$  gegen Null.  $A$  ist negativ, d.h. für eine positive ‘statische’ Amplitude  $f_0$  ist die ‘dynamische’ Amplitude  $A_0$  negativ; man sagt, Eingang und Ausgang sind ( $180^\circ$ ) phasenverschoben.

In diesem Fall kann der Ansatz  $x_p(t) = A_0 \cos \omega t$  nicht zum Ziel führen, da er

$$\omega_n = \omega$$

auch die homogene Gleichung löst. Die modifizierte Ansatzfunktion lautet nun [28]

$$x_p(t) = A_0 t \sin \omega t,$$

und damit die Lösungsfunktion  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + A_0 t \sin \omega t.$$

$A_0$  wird durch Einsetzen des Ansatzes  $x_p$  in die Gleichung (2.3.3) gewonnen:

$$A_0 = \frac{f_0}{2\omega}.$$

Damit wird die Lösung für  $\omega = \omega_n$

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t, \quad (2.3.9)$$

wobei die Amplituden  $A_1$  und  $A_2$  wieder aus den beiden Anfangsbedingungen  $x_0$  und  $\dot{x}_0$  gewonnen werden, die in Gleichung (2.3.9) und deren Ableitung für  $t = 0$  eingesetzt werden. Damit erhält man schließlich

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t \quad (2.3.10)$$

als Lösung. In ihr kommt  $\omega_n$  nur scheinbar nicht vor, da es gleich der anregenden Kreisfrequenz  $\omega$  ist. Man erkennt leicht, warum Resonanz im ungedämpften Fall katastrophale Auswirkungen hat: Der dritte Summand in der Lösung (2.3.10) wächst für  $t \rightarrow \infty$  über alle Schranken, s.a. Abb. 2.8

### 2.3.1.2 Schwebung

Wir kehren zurück zur Gleichung (2.3.6) und setzen dort die Anfangsbedingungen zur Vereinfachung — aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit — zu Null. Dann erhalten wir nach kurzer Umrechnung

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_n t),$$

was unter Verwendung eines Theorems der Winkelfunktionen als Produkt darstellbar ist:

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \left( \frac{\omega_n + \omega}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right). \quad (2.3.11)$$

Nun sei die erregende Frequenz  $\omega$  nur wenig kleiner als die Eigenfrequenz  $\omega_n$ :

$$\omega_n - \omega = 2\epsilon$$

mit  $\epsilon$  einer kleinen positiven Größe. Außerdem gilt

$$\omega_n + \omega \approx 2\omega$$

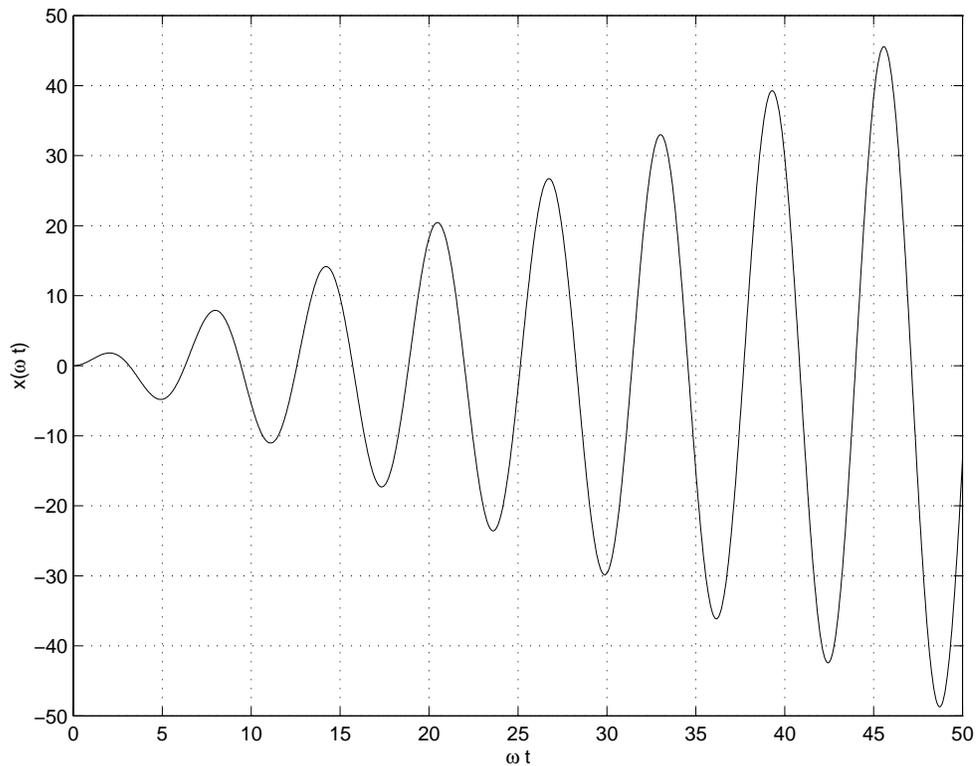


Abbildung 2.8: Resonanzkatastrophe

und nach Multiplikation dieser beiden Relationen

$$\omega_n^2 - \omega^2 \approx 4\epsilon\omega.$$

Mit den eben beschriebenen Beziehungen wird Gleichung (2.3.11) zu

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\epsilon\omega} \sin \epsilon t \sin \omega t.$$

Dies ist eine Schwingung mit der Frequenz  $\omega$ , Schwingungsperiode  $T = 2\pi/\omega$ , und einer zeitvariablen, harmonischen Amplitude

$$A(t) = \frac{F_0}{2m\epsilon\omega} \sin \epsilon t.$$

Die Periode der Amplitude ist  $T_A 2\pi/\epsilon$ . Diese Schwingungsform ist Ihnen aus dem Physikunterricht als Schwebung bekannt. Eine typische Schwebung ist in Abb. 2.9 dargestellt.

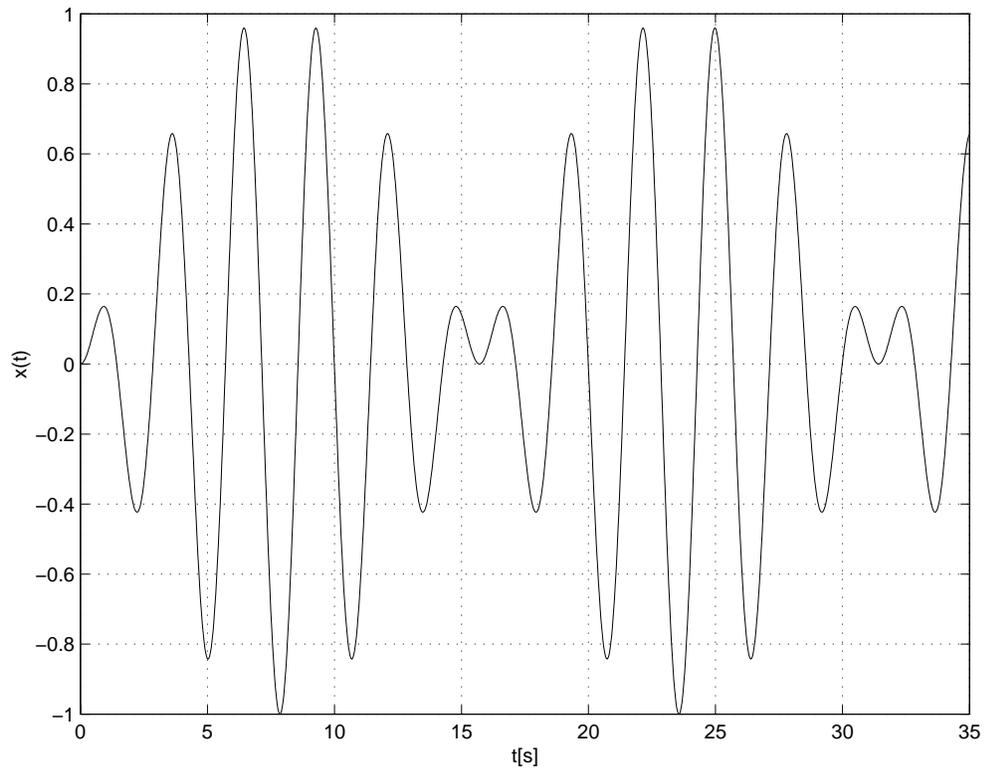


Abbildung 2.9: Schwebung

### 2.3.2 Harmonische Anregung des gedämpften Systems

Die Bewegungsgleichung (2.2.1) des homogenen gedämpften Systems wird jetzt um den Erregerterm  $F_0 \cos \omega t$  ergänzt:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (2.3.12)$$

#### 2.3.2.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Die partikuläre Lösung dieser Gleichung wird wegen des Dämpfungsterms  $c\dot{x}(t)$  nicht mehr in Phase mit der Anregung schwingen, sondern wir müssen einen Phasenwinkel  $\phi_0$  in den Ansatz einführen:

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi_0).$$

Die Konstanten  $A_0$  und  $\phi_0$  werden wieder durch Einsetzen von  $x_p$  und deren Ableitungen in Gleichung (2.3.12) bestimmt:

$$A_0[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi_0) - c\omega \sin(\omega t - \phi_0)] = F_0 \cos \omega t.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme der Winkelfunktionen wird diese Gleichung zunächst umgeformt, und dann werden die Sinus- und Kosinusterme beider Gleichungsseiten gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} A_0[(k - m\omega^2) \cos \phi_0 + c\omega \sin \phi_0] \cos \omega t &= F_0 \cos \omega t, \\ A_0[(k - m\omega^2) \sin \phi_0 - c\omega \cos \phi_0] \sin \omega t &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten  $A_0$  und  $\phi_0$  mit der Lösung

$$A_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.3.13)$$

und

$$\phi_0 = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2}. \quad (2.3.14)$$

Übung 1 Überprüfen Sie die Lösung mit Bleistift und Papier.

□

Die Gesamtlösung der Bewegungsgleichung ergibt sich wieder aus der Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung  $x = x_h + x_p$ , mit  $x_h$  z.B. aus Abschnitt 2.2.2.3 Gleichung (2.2.12)

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t - \phi) + A_0 \cos(\omega t - \phi_0). \quad (2.3.15)$$

### 2.3.2.2 Diskussion der Lösung

Mit den in Abschnitt 2.2.2 eingeführten Begriffen der statischen Auslenkung  $\Delta = f_0$ , des Frequenzverhältnisses  $\eta$  und der Vergrößerungsfunktion  $V$  erhalten wir folgende Beziehungen:

$$V(\zeta, \eta) = \frac{A_0}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (2.3.16)$$

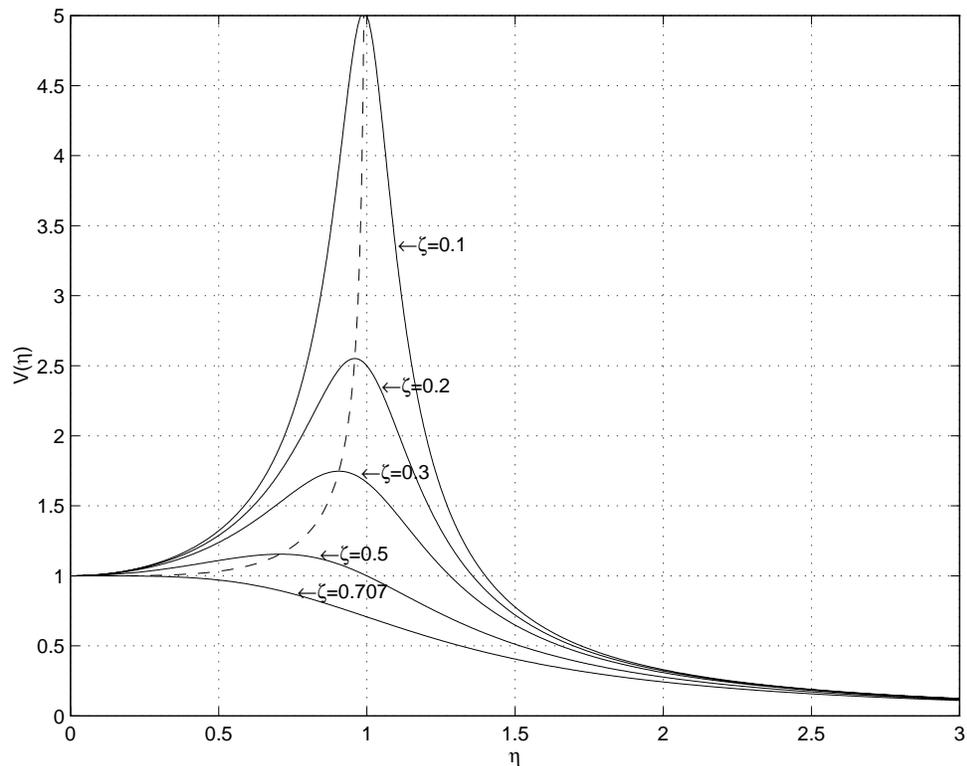
und

$$\phi_0 = \arctan \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}. \quad (2.3.17)$$

Übung 2 Vollziehen Sie bitte die Ausdrücke (2.3.16) und (2.3.17) mit Bleistift und Papier nach.

□

2.3.2.2.1 Vergrößerungsfunktion I Für ein Dämpfungsverhältnis  $\zeta = 0$  reduziert sich die Beziehung (2.3.16) auf die der ungedämpften Schwingung (2.3.7). Für  $\zeta > 0$  verschwindet der Pol in der Vergrößerungsfunktion (2.3.7), der Graph (2.3.16) der Vergrößerungsfunktion muß nicht bereichsweise diskutiert werde. In Abb. 2.10 ist die Vergrößerungsfunktion über dem Frequenzverhältnis

Abbildung 2.10: Vergrößerungsfunktion  $V$ 

$\eta$  mit dem Dämpfungsverhältnis  $\zeta$  als Parameter aufgezeichnet. Die Graphenschar zeigt  $\zeta$  von oben nach unten steigend; der geometrische Ort der Maxima von  $V$  ist gestrichelt angedeutet, s.a. Übung 3.

Folgendes ist zu erkennen:

- Für alle  $\eta$  nimmt  $V$  mit steigendem  $\zeta$  ab,
- Für große Werte von  $\eta$  tendiert  $V$  gegen Null,
- Die Steigung des Graphen von  $V$  im Ursprung ist für alle  $\zeta$  Null,
- Für  $\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  nimmt  $V$  mit wachsenden  $\eta$  monoton ab,
- Für  $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$  erreicht  $V$  ein Maximum bei

$$\eta = \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (2.3.18)$$

Übung 3 Leiten Sie die Beziehung (2.3.18) ab. Wie groß ist der Wert dieses Maximums?

□

2.3.2.2.2 Phasenwinkel I Der Phasenwinkel  $\phi_0$  als Funktion des Frequenzverhältnisses  $\eta$  ist in Abb. 2.11 dargestellt. Für  $\eta > 1$  steigt  $\zeta$  wieder von oben nach unten.

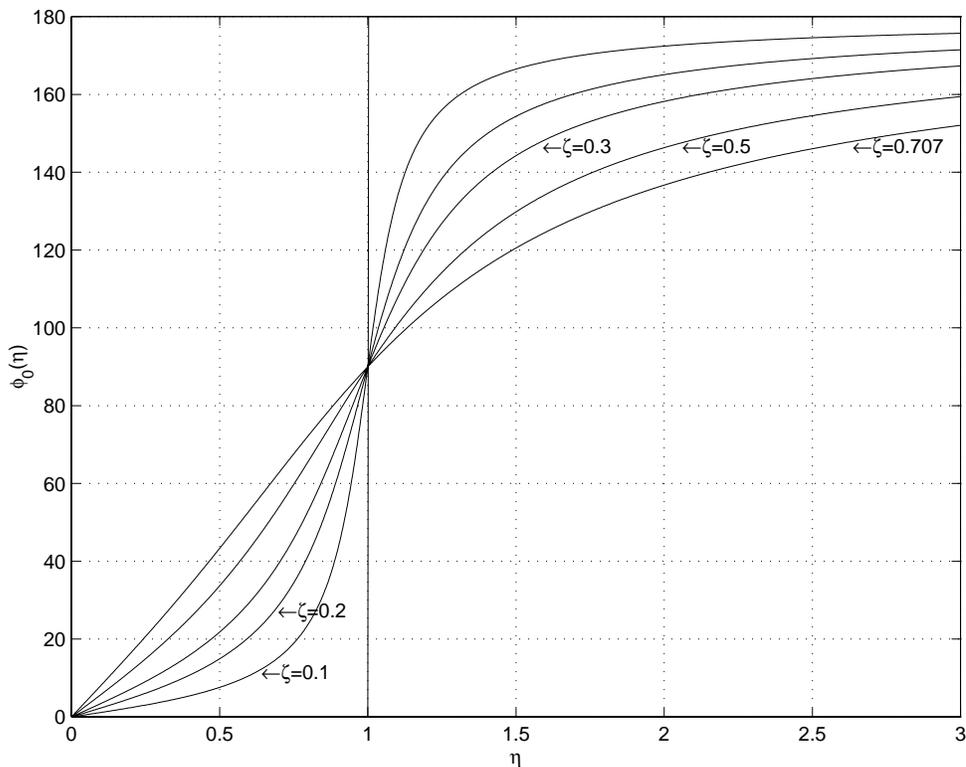


Abbildung 2.11: Phasenwinkel  $\phi_0$

Folgendes ist bemerkenswert:

- Für das ungedämpfte System ( $\zeta = 0$ ) gilt

$$\phi_0 = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \eta < 1, \\ 180^\circ & \text{für } \eta > 1, \end{cases}$$

für  $\eta = 0$  ist eine Definition nicht sinnvoll, da hier die Ausgangsamplitude über alle Schranken wächst.

- Für gedämpfte Systeme ( $\zeta > 0$ ) gilt

$$\phi_0 = \begin{cases} 0^\circ < \phi_0 < 90^\circ & \text{für } 0 < \eta < 1, \\ 90^\circ & \text{für } \eta = 1, \\ 90^\circ < \phi_0 < 180^\circ & \text{für } \eta > 1. \end{cases}$$

- Für große Werte von  $\eta$  nähert sich  $\phi_0 \rightarrow 180^\circ$ , d.h. Anregung und Antwort sind außer Phase.

2.3.2.2.3 Kraftübertragung I Im Zusammenhang mit der Schwingungsisolierung ist die auf den Basispunkt wirkende Kraft  $f_B(t)$  von Bedeutung. Diese setzt sich aus Feder- und Dämpferkraft zusammen:

$$f_B(t) = c\dot{x}(t) + kx(t).$$

Sie wird im stationären Fall aus der partikulären Lösung  $x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi_0)$  und deren Ableitung  $\dot{x}_p(t) = -\omega A_0 \sin(\omega t - \phi_0)$  zu

$$\begin{aligned} f_B(t) &= kA_0 \cos(\omega t - \phi_0) - c\omega A_0 \sin(\omega t - \phi_0) \\ &= kA_0 \cos(\omega t - \phi_0) - c\omega A_0 \cos(\omega t + \phi_0 + \pi/2) \end{aligned}$$

berechnet. Die zweite Zeile dieser Gleichung zeigt, daß die beiden Vektorsummanden orthogonal zueinander sind ( $\pi/2!$ ), und der Betrag der Summe ist

$$F_B = A_0 \sqrt{(k)^2 + (c\omega)^2}$$

und mit Gl. (2.3.13)

$$F_B = F_0 \sqrt{\frac{(k)^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

woraus das Verhältnis der Amplitude der anregenden Kraft  $F_0$  zur übertragenen Kraft  $F_B$  gebildet werden kann:

$$\frac{F_B}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}, \quad (2.3.19)$$

welches später im Zusammenhang mit der Basisanregung 2.3.4.1 auch als  $V_2$  bezeichnet werden wird. Dort hat es aber anderer Entstehungsursachen. Die Diskussion des Graphen von Gl. (2.3.19) erfolgt in Abschnitt 2.3.4.1.1.

2.3.2.2.4 Bandbreite In Übung 3 haben Sie das Maximum der Vergrößerungsfunktion für kleine  $\zeta$  zu

$$V_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

bestimmt, welches für  $\zeta \ll 1$  durch

$$V_{\max} \approx \frac{1}{2\zeta} \quad (2.3.20)$$

approximiert werden kann. Dieser Wert wird auch als Qualitätsfaktor  $Q$  bezeichnet. Die Frequenzwerte  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , die den Werten  $Q_2 = Q/\sqrt{2}$  auf dem  $V$ -Graphen sind Frequenzen halber Leistung, da die durch Dämpfung dissipierte Leistung  $\Delta W = \pi c \omega_d X^2$  proportional zum Quadrat der Amplitude  $X$  ist, s.a. Abschnitt 2.2.3.3.

Der Sachverhalt ist in Abb. 2.12 skizziert.

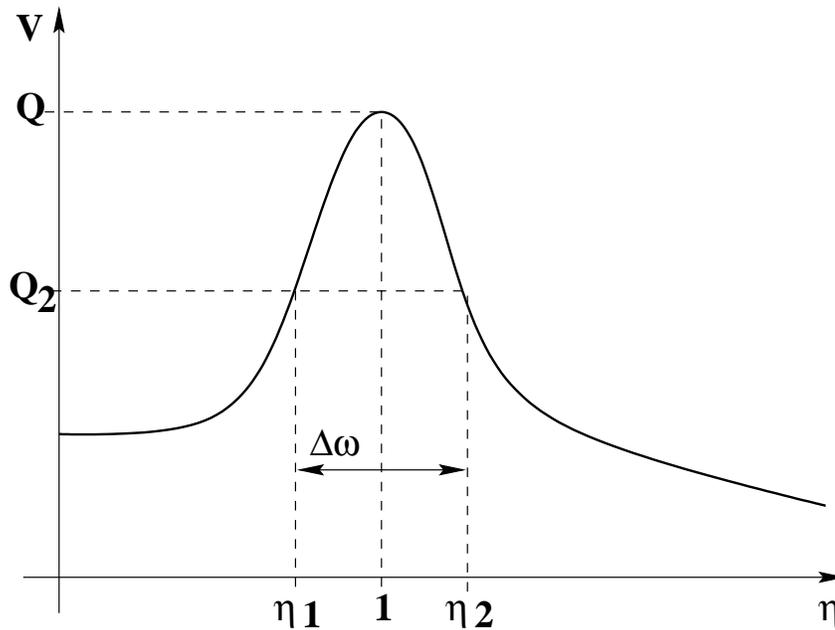


Abbildung 2.12: Bandbreite

Die Differenz  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  wird als Bandbreite des Systems bezeichnet und beträgt ungefähr

$$\Delta\omega \approx 2\zeta\omega_n. \quad (2.3.21)$$

Dies ist wie folgt einzusehen:

Die Frequenzen halber Leistung erhält man mit Beziehung (2.3.18) aus Gl. (2.3.16) zu

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\zeta}$$

oder als Lösung der Gleichung

$$\eta^4 - (2 - 4\zeta^2)\eta^2 + 1 - 8\zeta^2 = 0,$$

die

$$\eta_1^2 = 1 - 2\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}$$

und

$$\eta_2^2 = 1 - 2\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}$$

sind und für  $\zeta \ll 1$  als

$$\eta_1^2 \approx 1 - 2\zeta \quad \text{und} \quad \eta_2^2 \approx 1 + 2\zeta$$

approximiert werden können. Nun gilt

$$\begin{aligned} \omega_2^2 - \omega_1^2 &= (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1) \\ &= (\eta_2^2 - \eta_1^2)\omega_n^2 \\ &\approx 4\zeta\omega_n^2 \end{aligned}$$

und außerdem

$$\omega_2 + \omega_1 \approx 2\omega_n,$$

womit die Beziehung (2.3.21) bewiesen ist.

Mit Gl. (2.3.21) in Gl. (2.3.20) eingesetzt erhält man mit

$$Q \approx \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{1}{2\zeta} \quad (2.3.22)$$

▽ eine Beziehung, aus der man bei experimentell leicht ermittelbarem  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  und den beiden Frequenzen bei halber Leistung einfach das Dämpfungsverhältnis  $\zeta$  bestimmen kann.

Beispiel 5 *Ein Feder-Masse-Dämpfer-System wird harmonisch angeregt. Die Amplitude bei Resonanzfrequenz ist 20 mm und die Amplitude bei 3/4 der Resonanzfrequenz ist 10 mm. Wie groß ist das Dämpfungsverhältnis  $\zeta$ ?*

Lösung: Es gilt mit Gl. (2.3.16) und Gl. (2.3.20)

$$\frac{A_0}{f_0} \Big|_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta},$$

d.h.

$$f_0 = 0.02 \times 2\zeta = 0.04\zeta.$$

Andererseits ist

$$\frac{A_0}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \Big|_{\eta=0.75}$$

was für  $\eta = \omega/\omega_n = 3/4$

$$\frac{0.01}{0.04\zeta} = \frac{1}{\sqrt{0.1914 + 2.25\zeta^2}}$$

bedeutet, und daraus erhält man  $0.1914 + 2.25\zeta^2 = 16\zeta^2 \Rightarrow \zeta = 0.118$ .

□

▽ Aufgabe 12 *Zeigen Sie, daß für  $\zeta \ll 1$  zwischen dem Dämpfungsverhältnis  $\zeta$  und den Frequenzen halber Leistung  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , folgende Beziehung besteht:*

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}. \quad (2.3.23)$$

□

### 2.3.3 Komplexe Erregerfunktion

Die Euler-Identität

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

erlaubt es, den Realteil  $F_0 \cos \omega t$  und den Imaginärteil  $F_0 \sin \omega t$  einer harmonischen Anregung zusammenzufassen zur Exponentialfunktion  $f(t) = F_0 e^{j\omega t}$  und damit die Bewegungsgleichung (2.3.12) in folgende Form zu bringen

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 e^{j\omega t}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (2.3.24)$$

Der Realteil der Lösung  $x(t)$  dieser Gleichung entspricht dabei der physikalischen Lösung.

### 2.3.3.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Wie in Abschnitt 2.3.2.1 wird zur Lösung der — jetzt komplexen — Bewegungsgleichung die partikuläre Lösung als

$$x_p(t) = A_0 e^{j\omega t} \quad (2.3.25)$$

angesetzt. Dieser Ansatz und dessen erste und zweite Ableitungen werden in die Bewegungsgleichung (2.3.24) eingesetzt. Unter der Bedingung, daß diese für alle Zeitpunkte  $t$  gelten muß, d.h. daß  $e^{j\omega t}$  nicht identisch verschwinden darf, wird für die Ausgangsamplitude  $A_0$  folgender Ausdruck erhalten:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{F_0}{k - m\omega^2 + jc\omega} \\ &= \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F_0 - j \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F_0 \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} e^{-j\phi}, \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

wobei die letzte Formelzeile aus der Äquivalenz der Darstellung komplexer Variablen in kartesischen und in Polarkoordinaten  $x + jy = r e^{j\phi}$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\phi = \arctan(y/x)$  folgt und für

$$\phi = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

resultiert.  $A_0$  in den Ansatz (2.3.25) eingesetzt ergibt für die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} e^{j(\omega t - \phi)} \quad (2.3.27)$$

### 2.3.3.2 Frequenzgang

Wie in Abschnitt 2.3.2 wird die Vergrößerungsfunktion  $V = A_0/f_0 = kA_0/F_0$  verwendet um den komplexen Frequenzgang  $H(j\omega)$  zu definieren:

$$H(j\omega) \equiv A_0/f_0 = \frac{1}{1 - \eta^2 + j2\zeta\eta}, \quad (2.3.28)$$

dessen Betrag

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$


---

die in der Beziehung (2.3.16) definierte Vergrößerungsfunktion  $V$  darstellt. Aus der Relation (2.3.26) ist ersichtlich, daß für den Frequenzgang

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{-j\phi}$$

gilt, wobei in diesem Zusammenhang der Phasenwinkel  $\phi$

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}$$

beträgt. Damit kann die partikuläre Lösung (2.3.27) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$x_p(t) = f_0 |H(j\omega)| e^{j(\omega t - \phi)}. \quad (2.3.29)$$

Spezialfälle dieser Gleichung sind

$$x_p(t) = \Re \left( f_0 |H(j\omega)| e^{j(\omega t - \phi)} \right) = \frac{f_0}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (2.3.30)$$

für Anregung durch  $f(t) = F_0 \cos \omega t$  und

$$x_p(t) = \Im \left( f_0 |H(j\omega)| e^{j(\omega t - \phi)} \right) = \frac{f_0}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (2.3.31)$$

für Anregung durch  $f(t) = F_0 \sin \omega t$ .

Im Frequenzgang eines dynamischen Systems ist sowohl Amplituden- als auch Phaseninformation enthalten, die im sogenannten Bode-Diagramm als Amplituden- und Phasengang getrennt dargestellt wird. Das Bode-Diagramm ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Stabilitätsbestimmung und den Regler-Entwurf [18].

*Übung 4 Versuchen Sie den partikulären Anteil der Lösung der harmonisch angeregten Bewegungsgleichung (2.3.15) aus der allgemeineren Lösung (2.3.27) herauszufiltern. Hinweis: Teilen Sie Anregung und Antwort in Real- und Imaginärteile auf.*

□

### 2.3.3.3 Frequenzgang und Übertragungsfunktion

Die Laplace-Transformierte der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

lautet

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s),$$

und heißt als Verhältnis von Ausgang  $X$  zu Eingang  $F$  geschrieben Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}.$$

Die Beschränkung der komplexen Variablen  $s$  auf die imaginäre Achse  $s = j\omega$  führt auf

$$\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

und nach Multiplikation mit  $k$  auf

$$k \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{1 - \eta^2 + 2j\zeta\eta}.$$

Dies zeigt, daß zwischen Frequenzgang und Übertragungsfunktion eine unmittelbare Beziehung besteht:

$$kG(j\omega) = H(j\omega).$$

### 2.3.3.4 Geometrische Darstellung

Die Analyse der Lösung (2.3.29) läßt eine anschauliche geometrische Deutung in der komplexen Ebene zu.  $X_p$  wird zweimal differenziert: Es wird damit zunächst die Geschwindigkeit  $\dot{x}_p$  und dann die Beschleunigung  $\ddot{x}_p$  gewonnen:

$$\dot{x}_p(t) = j\omega f_0 |H(j\omega)| e^{j(\omega t - \phi)} = j\omega x_p(t)$$

und

$$\ddot{x}_p(t) = j^2 \omega^2 f_0 |H(j\omega)| e^{j(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t).$$

da  $j = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2)$  ist, eilt die Geschwindigkeit  $\dot{x}_p$  der Auslenkung  $x_p$  um den Winkel  $\pi/2 = 90^\circ$  voraus, und da  $-1 = \cos \pi + j \sin \pi$  ist, eilt die Beschleunigung  $\ddot{x}_p$  der Auslenkung um den Winkel  $\pi = 180^\circ$  voraus. Dies ist in Abb. 2.13 dargestellt. Dort ist auch zu erkennen, daß die Vektorsumme von  $m\ddot{x}_p$ ,  $c\dot{x}_p$  und  $kx_p$  gleich der anregenden Kraft  $f(t) = F_0 e^{j\omega t}$  ist. Die ganze Vektoranordnung rotiert in der komplexen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Übung 5 Überlegen Sie sich, welche geometrische Deutung das Diagramm im Falle der rein reellen harmonischen Anregung bekommt.

□

### 2.3.4 Alternative harmonische Anregungen

In vielen Fällen wirkt nicht eine unmittelbare äußere Kraft als Anregung auf das dynamische System, sondern solche Kräfte ergeben sich mittelbar, z.B. durch harmonische Erregung der Systembasis (Fußpunkterregung) oder eine rotatorische Unwucht im System.

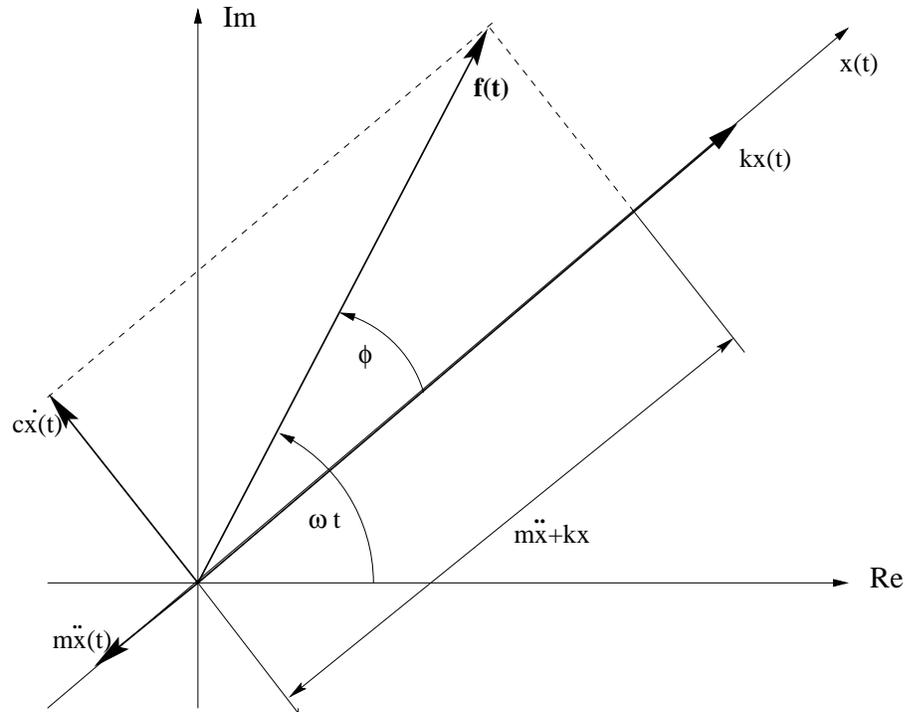


Abbildung 2.13: Kräfteanteile in komplexer Darstellung

#### 2.3.4.1 Harmonische Anregung der Basis

Eine harmonische Erregung der Systembasis ist in Abb. 2.14 dargestellt, in der ein stark vereinfachtes Fahrzeug über eine sinusförmige Fahrbahn fährt.

Die freigeschnittene Fahrzeugmasse mit der an ihr angreifenden Kräften ist dort ebenfalls angegeben, und damit ergibt die Modellbildung folgende Bilanz:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{y}(t) + ky(t),$$

woraus

$$m\ddot{x}(t) + c(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) + k(x(t) - y(t)) = 0. \quad (2.3.32)$$

folgt. Die Anregungsfunktion sei  $y(t) = Y \sin \omega t$ , und in Gl. (2.3.32) eingesetzt ergibt sich

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\omega Y \cos \omega t + kY \sin \omega t.$$

Dies ist ein dynamisches System mit zwei Anregungen, also müssen auch zwei partikuläre Lösungen angesetzt werden, die allerdings — wegen der Linearität

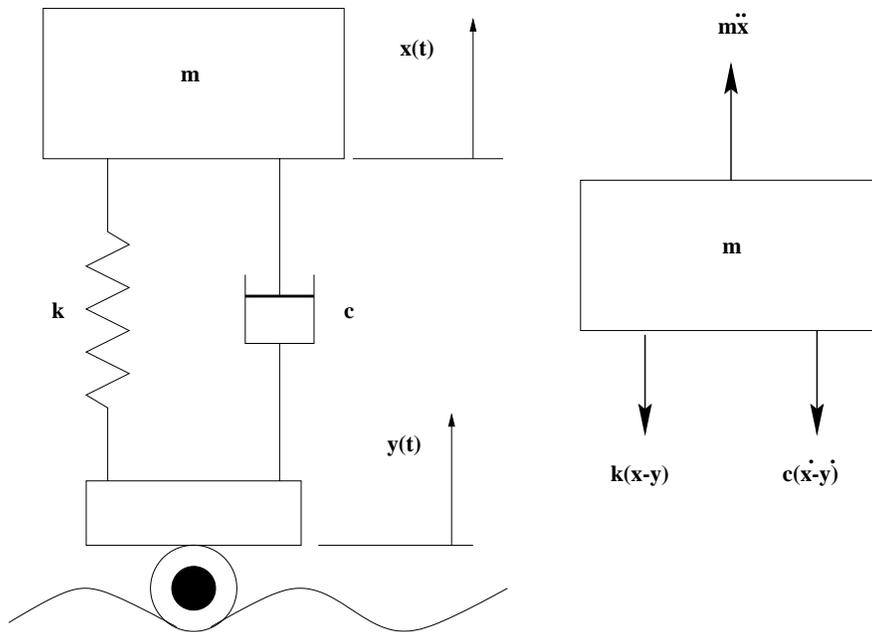


Abbildung 2.14: Harmonische Anregung der Basis

des Systems — superponiert werden können:

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \frac{c\omega Y \cos(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} + \frac{kY \sin(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \\
 &= Y \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2), \\
 &= Y \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2), \quad (2.3.33)
 \end{aligned}$$

mit

$$\phi_1 = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \arctan \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}$$

und

$$\phi_2 = \arctan \frac{k}{c\omega} = \arctan \frac{1}{2\zeta\eta},$$

wobei wieder das Frequenzverhältnis  $\eta = \omega/\omega_n$  und das Dämpfungsverhältnis  $\zeta = c/c_k$  sind.

Übung 6 Berechnen Sie die beiden zu  $c\omega Y \cos \omega t$  und  $kY \sin \omega t$  gehörenden partikulären Lösungen  $x_p^1(t)$  und  $x_p^2(t)$  und damit die Lösung  $x_p(t) = x_p^1(t) + x_p^2(t)$ .

□

Übung 7 Fassen Sie mit Hilfe einer guten Formelsammlung<sup>[6]</sup><sup>11</sup> die beiden Pha-

<sup>11</sup>Der Maple-Befehl `combine(expression, arctan, 'symbolic')` führt auch zum Erfolg.

senwinkel  $\phi_1$  und  $\phi_2$  zu einem zusammen und überprüfen Sie das Ergebnis

$$\phi_0 = -\arctan \frac{1 + (4\zeta^2 - 1)\eta^2}{2\zeta\eta^3}. \quad (2.3.34)$$

□

Dieser Phasenwinkel ist in Abb. 2.15 mit verschiedenen Dämpfungsverhältnissen als Parameter abgebildet.

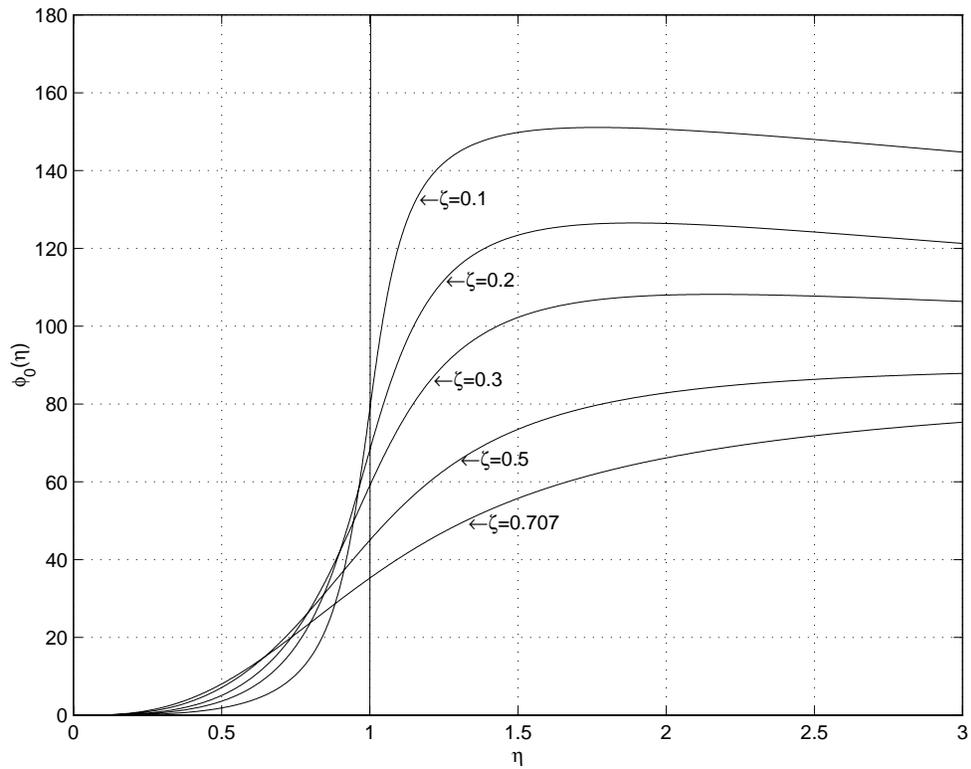


Abbildung 2.15: Phasenwinkel als Funktion der Erregerfrequenz

2.3.4.1.1 Vergrößerungsfunktion II Die Amplitude  $A_0$  der partikulären Lösung

$$A_0 = Y \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

wird ins Verhältnis zu der der Anregung  $Y$  gesetzt und ergibt dann den Auslenkungsfaktor<sup>12</sup>  $V_2$ , eine weitere Vergrößerungsfunktion

$$V_2(\eta, \zeta) = \frac{A_0}{Y} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}, \quad (2.3.35)$$

die beschreibt, wie die Auslenkung der Basis auf das System in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz übertragen wird. Sie ist in Abb. 2.16 für verschiedene Dämpfungsverhältnisse dargestellt.

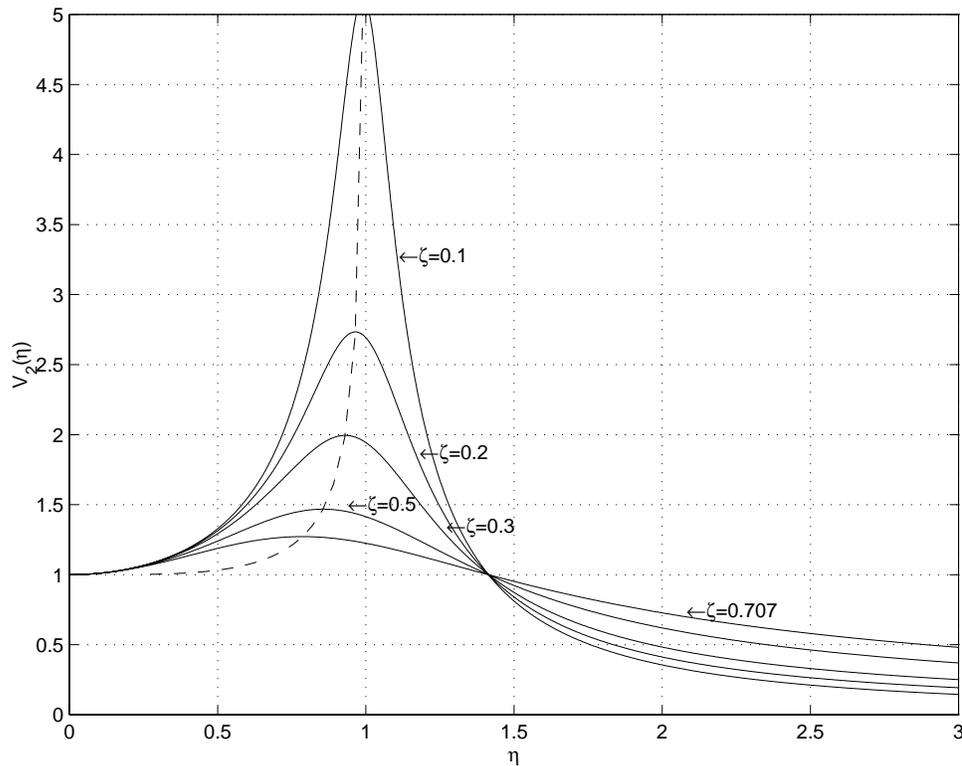


Abbildung 2.16: Auslenkungsfaktor als Funktion der Erregerfrequenz

Folgendes charakterisiert den Auslenkungsfaktor:

- Für alle  $\zeta$  und  $\eta = 0$  gilt  $V_2 = 1$ ,
- Für  $\zeta = 0$  und  $\eta \rightarrow 1$  gilt  $V_2 \rightarrow \infty$  (Resonanz),
- Für alle  $\zeta$  und  $\eta = \sqrt{2}$  gilt  $V_2 = 1$ ,
- Für alle  $\zeta$  und  $\eta > \sqrt{2}$  gilt  $V_2 < 1$ ,

<sup>12</sup>Engl.: displacement transmissibility. Die deutsche Bezeichnung der verschiedenen Vergrößerungsfunktionen ist uneinheitlich. Hier wird der Vorschlag von Wittenburg[49] übernommen.

- Für  $0 < \zeta < 1$  erreicht  $V_2$  ein Maximum bei

$$\eta = \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{1+8\zeta^2} - 1} < 1.$$

Übung 8 Zeigen Sie, daß das Maximum folgenden Wert annimmt:

$$V_{2_{\max}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+8\zeta^2}}{\left(1 - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{1+8\zeta^2} - 1}{\zeta^2}\right)^2 + \sqrt{1+8\zeta^2} - 1}}$$

□

2.3.4.1.2 Relativbewegung Die Abb. 2.14 zeigt, daß  $z = x - y$  die Relativauslenkung der Systemmasse bezüglich der bewegten Basis ist. In der Variablen  $z$  kann die Bewegungsgleichung (2.3.32) nun wie folgt angesetzt werden:

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t) = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

Deren stationäre Lösung ist

$$z(t) = \frac{m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} Y \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1),$$

mit

$$\phi_1 = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \arctan \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}.$$

Die Vergrößerungsfunktion  $V_3$

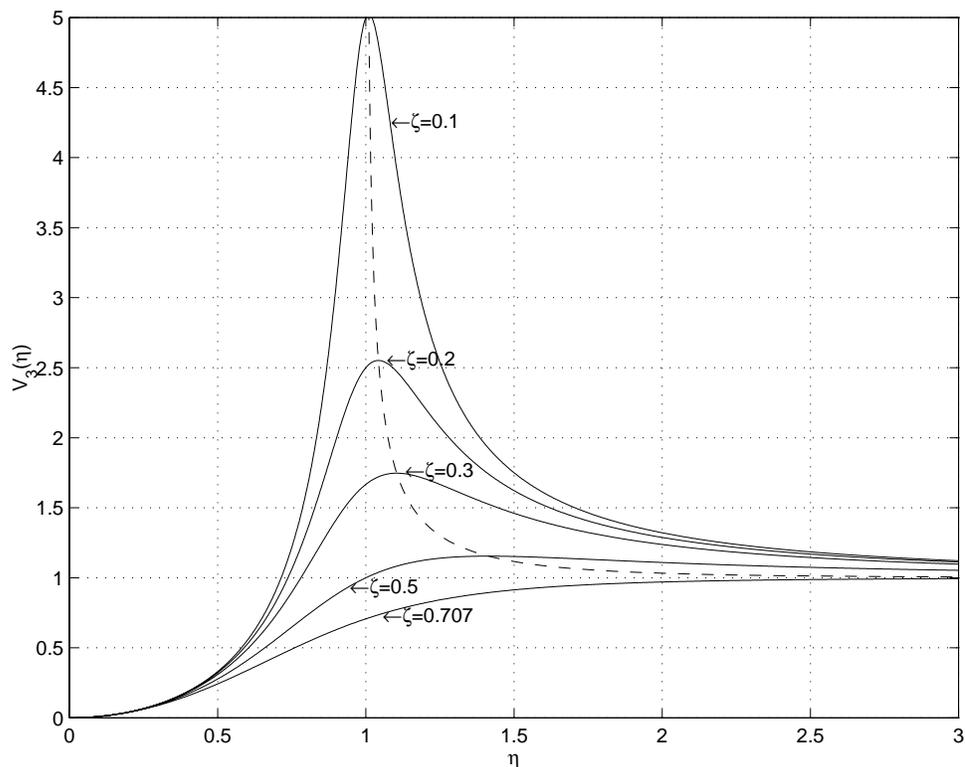
$$V_3 = \frac{Z}{Y} = \frac{m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

ist in Abb. 2.17 für unterschiedliche Dämpfungsverhältnisse aufgezeichnet. Auch hier zeigt die gestrichelte Linie den Graphen des geometrischen Ortes des Maximums von  $V_3$ . Der Graph des Phasenwinkels  $\phi_1$  ist identisch mit dem in Abb. 2.11

Die Relativbewegung ist durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

- Für kleine Frequenzen  $\omega \ll 1$  ist  $Z \approx 0$ , unabhängig von  $\zeta$ ,
- In der Resonanzregion,  $\omega \approx \omega_n$ , steigt die Vergrößerungsfunktion sehr stark mit abnehmendem Dämpfungsverhältnis  $\zeta$ ; um diesen Effekt zu verkleinern, müssen zusätzliche Dämpfungsmaßnahmen ergriffen werden,
- Für große Frequenzen  $\omega \rightarrow \infty$  tendiert die Vergrößerungsfunktion  $V_3 \rightarrow 1$ , unabhängig von  $\zeta$ ,
- Für  $0 < \zeta < \sqrt{2}/2$  erreicht die Vergrößerungsfunktion  $V_3$  ein Maximum bei

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}},$$

Abbildung 2.17: Vergrößerungsfunktion  $V_3$ 

- Für  $\zeta > \sqrt{2}/2$  steigt die Vergrößerungsfunktion monoton an.

Übung 9 Zeigen Sie, daß der Wert des Maximums der Vergrößerungsfunktion

$$V_{3\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ist.

□

2.3.4.1.3 Kraftübertragung II Aus der Abb. 2.14 ist ersichtlich, daß die beschleunigte Masse  $m$  eine Kraft  $f$

$$f(t) = k(x(t) - y(t)) + c(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = -m\ddot{x}(t)$$

auf die Basis ausübt. Sie kann — im stationären Zustand — aus der partikulären Lösung (2.3.33) durch zweimalige Differentiation gewonnen werden

$$\begin{aligned} f(t) &= m\omega^2 Y \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \\ &= kY\eta^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \\ &= F_T \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2), \end{aligned}$$

wobei die Amplitude der übertragenen Kraft

$$F_T = kY\eta^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

ist, und das Verhältnis  $V_4$

$$V_4 = \frac{F_T}{kY} = \eta^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

als Kraftübertragungsfaktor<sup>13</sup> bezeichnet wird, einer weiteren Vergrößerungsfunktion. Der Graph von  $V_4$  ist in Abb. 2.18 für unterschiedliche Dämpfungsverhältnisse dargestellt.

#### 2.3.4.2 Rotatorische Unwucht

Rotatorische Unwuchten sind häufig die Ursachen unangenehmer maschinendynamischer Probleme, die durch geeignete aktive oder passive Kompensation beseitigt oder gemindert werden müssen. Kleine Unregelmäßigkeiten in der Massenverteilung, z.B. elektrischer Antriebe, führen zu beträchtlichen Vibrationen.

Eine beispielhafte mechanische Anordnung zeigt Abbildung 2.19, in der auch die freigeschnittene Masse mit den an ihr angreifenden Kräften und Momenten dargestellt ist. Der Einfachheit halber sei die Anordnung symmetrisch angenommen, so daß sich die Kräfte  $\eta$  orthogonal zur  $x$ -Richtung und die beiden Momente  $\mu$  aufheben. Eine eventuell orthogonal zu  $\zeta$  wirkende Kraftkomponente muß durch eine geeignet angenommene Führung kompensiert werden.

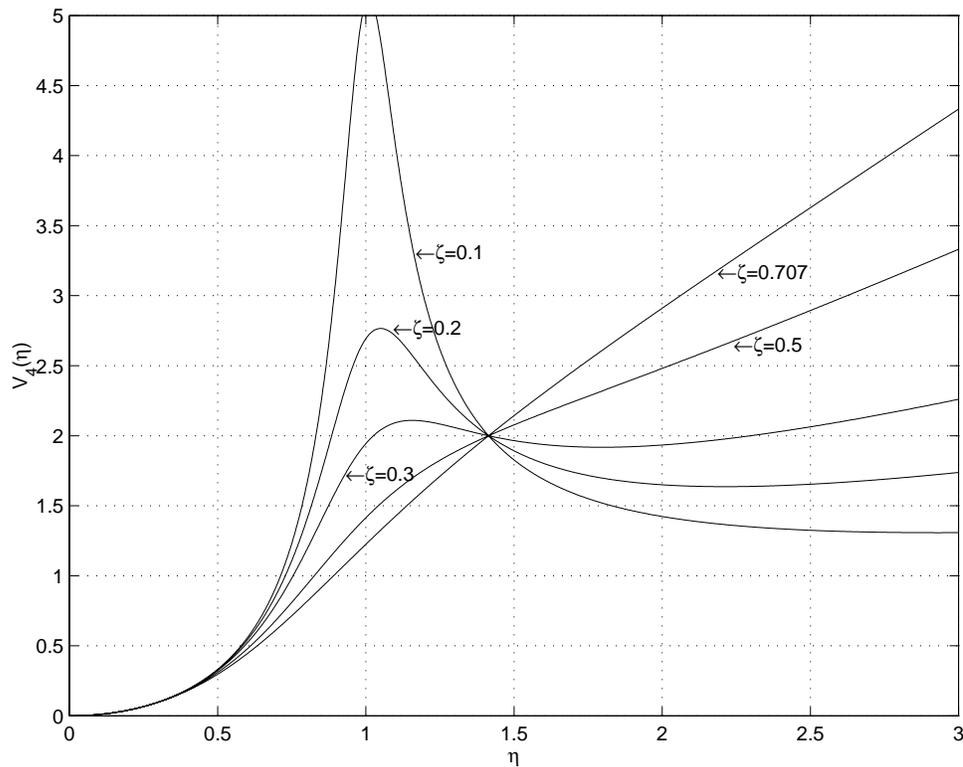
Zwei (Zusatz-)Massen  $m_r/2$  rotieren auf der (Maschinen-)Masse  $m$  mit einem Abstand  $e$  von der Rotationsachse mit der Kreisfrequenz  $\omega$ ; dann ist die  $x$ -Komponente der Massenauslenkung

$$x_r = e \cos \omega t$$

und die resultierende Kraftkomponente  $2\zeta$  ergibt sich aus der Beziehung

$$m_r a_x(t) = m_r(\ddot{x}(t) - e\omega^2 \cos \omega t) = -2\zeta(t). \quad (2.3.36)$$

<sup>13</sup>Engl.: force transmissibility.

Abbildung 2.18: Kraftübertragungsfaktor  $V_4$ 

Das Newtonsche Gesetz auf die freigeschnittene Masse  $m$  angewandt lautet:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) + 2\zeta(t)$$

und mit Gl. (2.3.36) und

$$M = m + m_r$$

ergibt sich damit die Bewegungsgleichung für ein System mit rotatorischer Unwucht

$$M\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = m_r e\omega^2 \cos \omega t. \quad (2.3.37)$$

Gleichung (2.3.37) ist ganz äquivalent zu Gleichung (2.3.31), in der nur  $m$  durch  $M$  und  $F_0$  durch  $m_r e\omega^2$  zu ersetzen sind.

Die partikuläre Lösung berechnet sich mit  $\eta = \omega/\omega_n$  zu

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi_0) = \frac{em_r}{M} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \cos(\omega t - \phi_0), \quad (2.3.38)$$

mit dem Phasenwinkel  $\phi_0$

$$\phi_0 = \arctan \frac{2\zeta\eta}{1-\eta^2}. \quad (2.3.39)$$

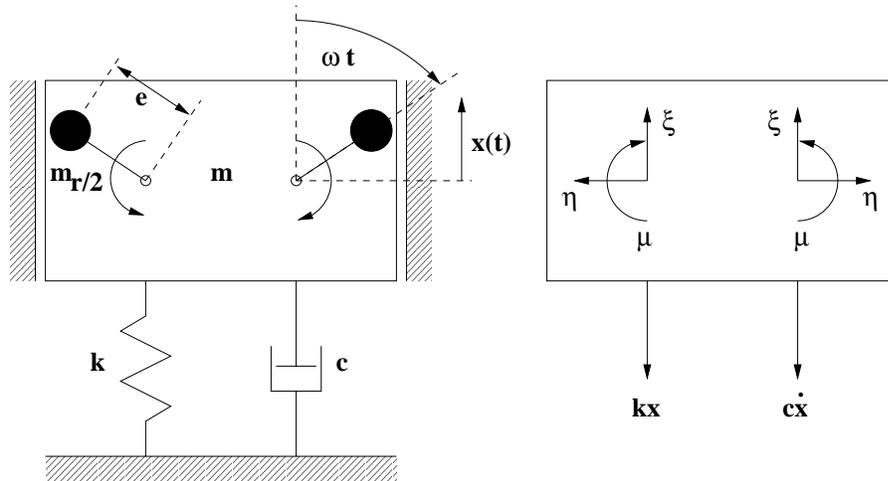


Abbildung 2.19: Rotatorische Unwucht

Aufgabe 13 Vollziehen Sie die Ermittlung der Amplitude  $A_0$  nach!

□

Die Vergrößerungsfunktion

$$\frac{MA_0}{m_r e} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}},$$

entspricht dem Z/Y des vorangegangenen Paragraphen 2.3.4.1.2, es gilt deswegen auch der entsprechende Graph in Abb. 2.17.

Auch hier gelten folgende Bemerkungen:

1. Die Vergrößerungsfunktion ist Null bei  $\omega = 0$ ,
2. Die Vergrößerungsfunktion tendiert gegen Eins für große  $\omega$ ,
3. Für  $0 < \zeta < \sqrt{2}/2$  erreicht die Vergrößerungsfunktion ein Maximum

$$\frac{mX}{m_e} \Big|_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.3.40)$$

bei

$$\eta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1, \quad (2.3.41)$$

4. Für  $\zeta > \sqrt{2}/2$  wächst die Vergrößerungsfunktion monoton.

### 2.3.5 Alternative Dämpfungsmodelle II

#### 2.3.5.1 Coulomb-Dämpfung

Die angeregte Schwingung mit trockener Reibung genügt folgender Modellgleichung, s.a. Abschnitt 2.2.4.1,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) \pm \mu N = F_0 \sin \omega t, \quad (2.3.42)$$

wobei die Reibungskraft  $\mu N$  addiert wird, wenn  $\dot{x} > 0$  gilt und sie subtrahiert wird, wenn  $\dot{x} < 0$  ist.

#### 2.3.5.2 Hysterese-Dämpfung

Dämpfungsmechanismen werden häufig als dissipierte Energien während eines Schwingungszyklus untersucht. Dabei werden (experimentelle) Hysterese-Diagramme in Form von Spannungs-Dehnungs-Kennlinien betrachtet.

Die Verlustenergie  $\Delta E$  während eines Zyklus ist das Linienintegral

$$\Delta E = \oint F_d dx$$

über einen Zyklus mit  $F_d$  der Dämpfungskraft.

Beispiel 6 *Im Fall viskoser Dämpfung wird  $\Delta E$  wie folgt berechnet:*

$$\Delta E = \int_0^{2\pi/\omega} \left( c\dot{x} \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\dot{x}^2 dt.$$

*Im stationären Zustand ist  $x = X \sin \omega t$  und  $\dot{x} = \omega \cos \omega t$  und damit wird  $\Delta E = c\pi\omega X^2$ . (Überprüfen Sie das bestimmte Integral!)*

□

Betrachtet sei nun ein Dehnungs-Kraft-Diagramm für viskose Dämpfung. Die Summe der externen (Feder- und Dämpfer-)Kräfte ist

$$F = kx + c\dot{x}$$

Die stationäre Lösung sei von der Form  $x(t) = X \sin \omega t$ , dann wird

$$F = kx + cX\omega \cos \omega t = kx \pm c\omega X \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2}.$$

Nach Quadrieren und Umordnen ergibt sich die Gleichung einer rotierten Ellipse:

$$F^2 + (c^2\omega^2 + k^2)x^2 - 2kFx - c^2\omega^2 X^2 = 0,$$

deren Graph in Abb. 2.20 dargestellt ist, und deren Fläche den oben berechneten Wert  $\Delta E$  einnimmt. Wenn keine viskose Dämpfung wirkt ( $c = 0$ ), dann kollabiert die Ellipse auf die eingezeichnete Gerade mit der Steigung  $k$ , der Kennlinie der Feder.

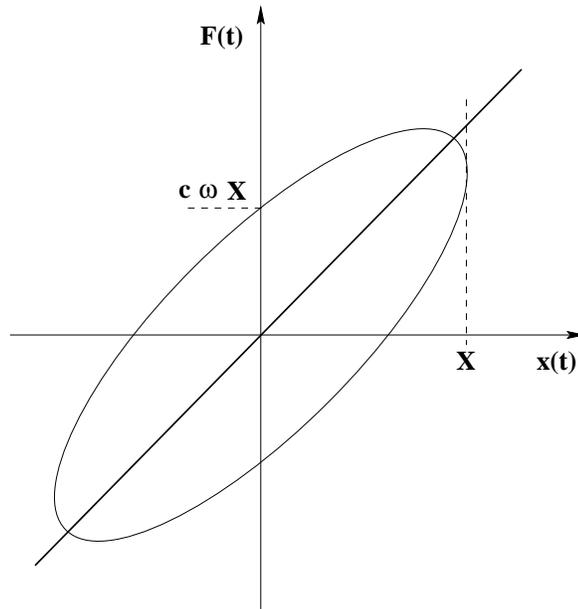


Abbildung 2.20: Hysterese-Diagramm für viskose Dämpfung

Solche Spannungs-Dehnungs-Diagramme werden experimentell ermittelt. In der Praxis findet man oft den Fall, daß die Hysterese-Schleife von der Anregungsfrequenz  $\omega$  unabhängig ist: → Werkstoffkunde

$$\Delta E = \pi k \beta X^2 = \pi h X^2,$$

mit  $\beta$  oder  $h = k\beta$  der Hysterese-Dämpfungskonstanten. Diese Dämpfung wird zur viskosen in Beziehung gesetzt, indem gleiche Energie-Dissipation, d.h. gleiche Fläche der Hystereseschleife angenommen wird,  $\pi \hat{c} \omega X^2 = \pi k \beta X^2$ , und damit eine äquivalente Dämpfungskonstante  $\hat{c}$

$$\hat{c} = \frac{k\beta}{\omega},$$

mit experimentell gewonnenem  $\beta$ .

Nun wird wieder analog zu Abschnitt 2.3.2 die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \hat{c}\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (2.3.43)$$

formuliert und gelöst:

$$x_p = X \cos(\omega t - \phi),$$

mit

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\hat{\zeta}\eta)^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \beta^2}}$$

und

$$\phi = \arctan \frac{\beta}{1-\eta^2},$$

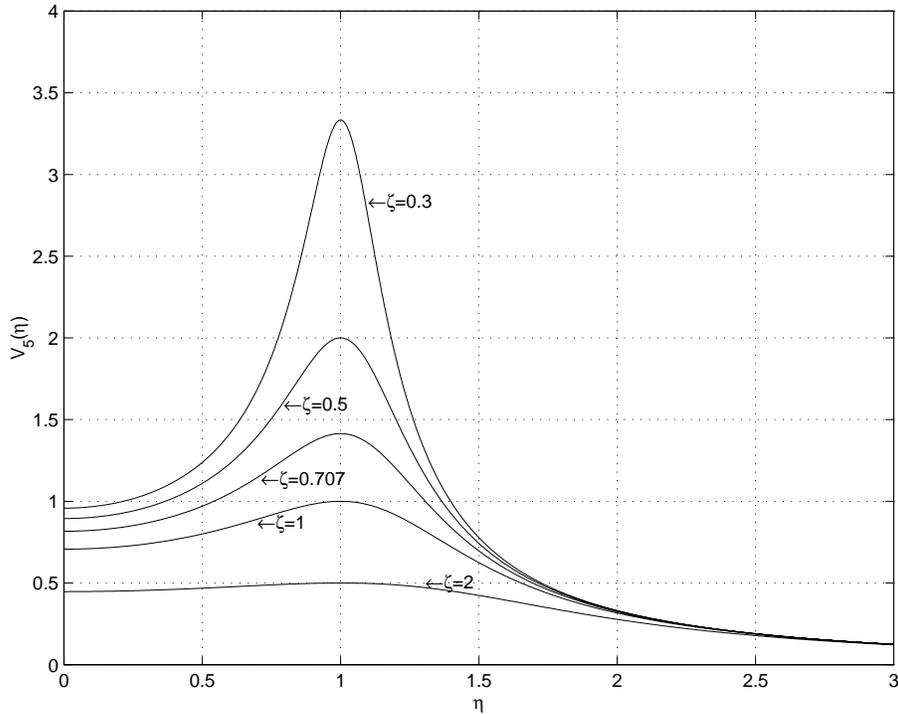


Abbildung 2.21: Amplitudengang bei Hysterese-Dämpfung

wobei

$$\hat{\zeta} = \frac{\hat{c}}{2\sqrt{mk}}$$

und

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{k/m}}$$

sind.

In den Abb. 2.21 und 2.22 sind Amplitudengang und Phasengang für verschiedene Werte von  $\zeta$  dargestellt.

Sie erkennen folgendes:

- Die Vergrößerungsfunktion  $V_5 = X/f_0$  erreicht ihr Maximum

$$V_{\max} = \frac{1}{b}$$

bei  $\omega = \omega_n$  unabhängig von  $\zeta$ ,

- Der Phasenwinkel bei  $\omega = 0$  beträgt

$$\phi = \arctan \beta,$$

also ist die Systemantwort nie in Phase mit der Systemanregung.

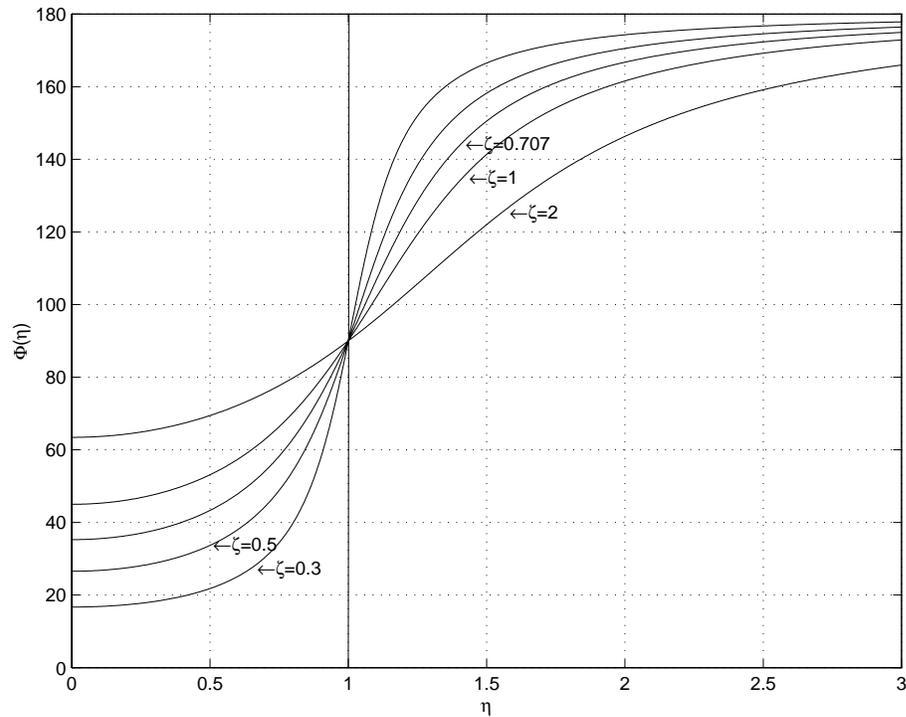


Abbildung 2.22: Phasengang bei Hysterese-Dämpfung

Aufgabe 14 *Diskutieren Sie ausführlich den Unterschied zwischen Hysterese-Dämpfung und viskoser Dämpfung.*

□

### 2.3.5.3 Luft-Dämpfung

Wenn ein System in Luft oder einem anderen viskosen Medium schwingt, dann ist die Dämpfungskraft proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  und die Systemgleichung wird folgendermaßen formuliert:

$$m\ddot{x} + \alpha \text{sign}\dot{x} \dot{x}^2 + kx = F_0 \cos \omega t.$$

Die Dämpfungskraft

$$F_d = \alpha \text{sign}\dot{x} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} c_w \rho A \text{sign}\dot{x} \dot{x}^2,$$

die der Geschwindigkeitsrichtung entgegenwirkt, hängt vom Widerstandsbeiwert  $c_w$ , von der Dichte  $\rho$  des Mediums und der Querschnittsfläche  $A$  des Systems ab. Die Berechnung des Energieverlustes geschieht nach dem Beispiel von [25]:

$$\Delta E = \frac{8}{3} \alpha \omega^2 X^3,$$

mit äquivalenter viskoser Dämpfung

$$\hat{c} = \frac{8}{3} \frac{\alpha \omega \chi}{\pi}. \quad (2.3.44)$$

#### 2.3.5.4 Kombinierte Dämpfungen

Für die Summe unterschiedlicher Dämpfungsanteile kann man ebenfalls eine äquivalente viskose Dämpfung definieren indem die Energieverluste der einzelnen Anteile aufsummiert werden:

$$\hat{c} = \frac{\sum_1^n \Delta E_i}{\pi \omega \chi^2}, \quad (2.3.45)$$

und mit diesem  $\hat{c}$  kann das System wie ein viskoses nach Abschnitt 2.3.2 analysiert werden.

*Aufgabe 15 Versuchen Sie aus der Literatur, z.B. [1],[5] eine möglichst vollständige und übersichtliche Zusammenstellung der unterschiedlichen Dämpfungsformen zu kompilieren.*

□

#### 2.3.6 Strömungs-induzierte Schwingungen

Bekannt sind strömungsinduzierte Schwingungen, wie das ‘Singen’ von Überlandleitungen oder die Bewegung von Brücken, Kaminen und Hochhäusern. Sie werden durch ein Phänomen erzeugt, das Karman’sche Wirbelstraße heißt.

Durch die vom Luftstrom angeströmten zylinderförmigen Bauten werden leeseits asymmetrisch abgehende Wirbel erzeugt, jeweils alternierend im Uhrzeiger- und Gegenuhrzeigersinn. Diese Wirbel bewirken ihrerseits eine harmonisch oszillierende Auftriebskraft senkrecht zur Anströmrichtung.

→ Strömungsmechanik

Experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, daß dieses Phänomen besonders bei Reynoldszahlen, dem Verhältnis der Trägheits- zu den Zähigkeitskräften in der Strömung,

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (2.3.46)$$

im Bereich

$$50 < \text{Re} < 5000$$

auftritt, wobei  $\rho$  die Dichte des strömenden Mediums ist,  $v$  dessen Geschwindigkeit,  $\eta$  dessen dynamische Zähigkeit und  $d$  der Bauteildurchmesser ist. Dabei ist die Frequenz  $f$  der abgehenden Wirbel durch die Strouhalzahl

$$\text{Sr} = \frac{f d}{v} = 0.21 \quad (2.3.47)$$



gegeben [17]. Die harmonisch variierende Auftriebskraft ist

$$f(t) = \frac{1}{2} c_A \rho v^2 A \sin \omega t, \quad (2.3.48)$$

mit  $c_A = 1$ , dem Auftriebskoeffizienten von Zylindern und  $A$  der Querschnittsfläche.

Aufgabe des Ingenieurs ist es:

- Die Eigenfrequenz  $\omega_n$  des Bauteils außerhalb des Frequenzbereichs der Anregung  $\omega = 2\pi f$  zu halten, um Resonanz zu vermeiden,
- Die Kraft (2.3.48) unter der statischen Fehlerbelastung des Bauteils zu halten.

### 2.3.7 Beispiele und Übungen

Beispiel 7 Für das in Abb. 2.23 dargestellte mechanische System einer an einer Stange der Länge  $l$  und Masse  $m_2$  aufgehängten Punktmasse  $m_1$ , die mit der harmonischen Kraft  $f(t) = F_0 \sin \omega t$  angeregt wird, soll die Bewegungsgleichung erstellt und die Amplitude  $\Theta$  der stationären Lösung berechnet werden.

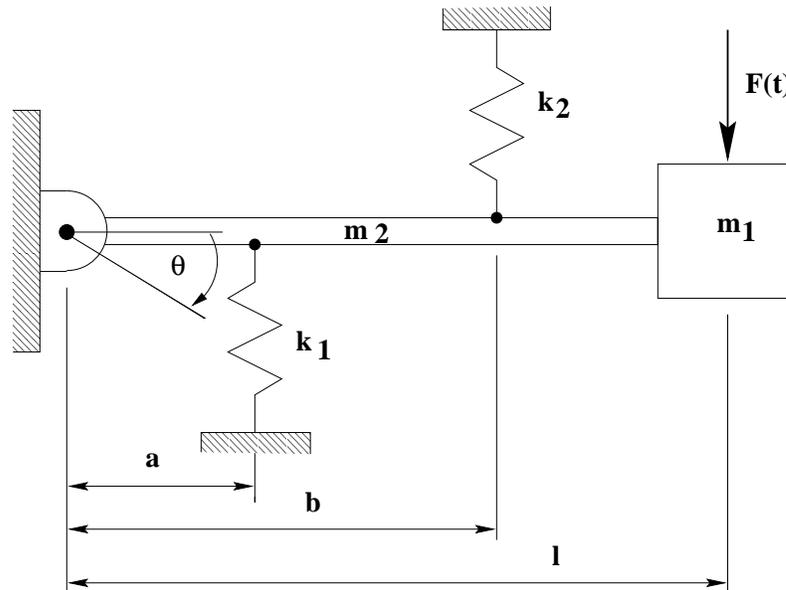


Abbildung 2.23: Dynamisches System

Das Momentengleichgewicht um den Drehpunkt ergibt die Bewegungsgleichung

$$(J_0 + m_1 l^2) \ddot{\theta}(t) + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta(t) = F_0 l \sin \omega t,$$

wobei das Massenträgheitsmoment der Stange  $J_0 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$  bezüglich des Drehpunktes aus dem um den Schwerpunkt  $l/2$  und dem 'Steiner-Anteil' berechnet ist.

Die stationäre Lösung folgt dem Ansatz

$$\theta_p = \Theta \sin \omega t$$

und hat als Amplitude

$$\Theta = \frac{F_0 l}{k_1 a^2 + k_2 b^2 - (J_0 + m_1 l^2) \omega^2}.$$

Mit  $a = 0.25 \text{ m}$ ,  $b = 0.5 \text{ m}$ ,  $l = 1.0 \text{ m}$ ,  $m_1 = 50 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 10 \text{ kg}$ ,  $k_1 = k_2 = 5000 \text{ N/m}$ ,  $F_0 = 500 \text{ N}$  und  $\omega = 1000 \text{ U/min}$  wird die Amplitude der stationären Lösung

$$\Theta = \frac{500}{5000(0.25^2 + 0.5^2) - (3.333 + 50)104.72^2} = -8.572 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

Besorgen Sie sich<sup>14</sup> das Computer-Algebra-System *MuPAD*[19] und lassen Sie sich den Lösungsgraphen zeichnen. Das geht ganz einfach:

MuPAD

Mit `read(■beispiel.mu■)` lesen Sie am *MuPAD*-Prompt folgendes Beispiel-File ein:

```
a:=0.25:
b:=0.5:
l:=1.0:
M:=50.0:
m:=10.0:
k:=5000.0:
F:=500.0:
w0:=200.0:
w:=2*PI*w0/60:
J:=m*l^2/3+M*l^2:
K:=k*(a^2+b^2):
f:=ode({J*diff(Q(t),t,t)+K*Q(t)=F*l*sin(w*t),Q(0)=0,D(Q)(0)=0},Q(t));
x:=solve(f);
graph:= [Mode=Curve, [t, op(x,1)], t=[0,2], Grid=[50], Smoothness=[20]];
plot2d(Axes=Origin, Ticks=5, Labeling=TRUE, Scaling=UnConstrained, graph);
```

Zunächst werden die Daten eingelesen, dann mit der Prozedur `ode` die Differentialgleichung formuliert, in `solve` gelöst, und in `plot2d` wird der in Abb. 2.24 folgende Graph gezeichnet. Dabei variiert  $\omega_0$  von 200 bis 800.

Fragen: 1) Was bedeutet das negative Vorzeichen von  $\Theta$ ?

2) Interpretieren Sie den Graphen in Abb. 2.24

<sup>14</sup>Kostenfrei unter <http://math-www.uni-paderborn.de/MuPAD/> für Linux oder Windows95

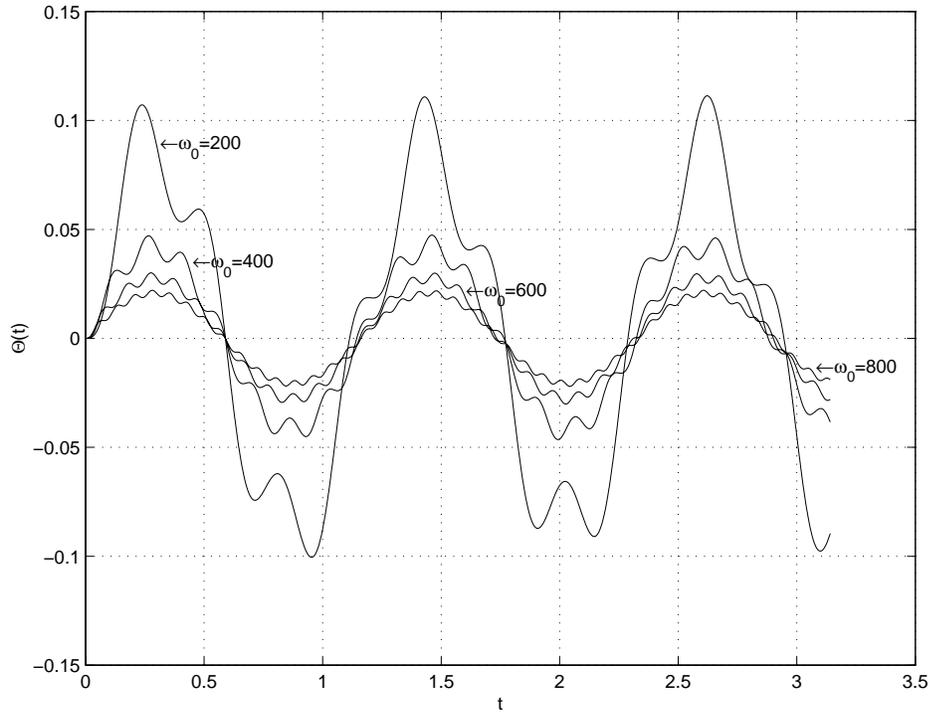


Abbildung 2.24: Beispielgraph

- Anregung: 1) Variieren Sie einige der Parameter des Beispiels, z.B.  $m_1$  und wiederholen Sie dann die MuPAD-Sitzung.  
 2) Beantworten Sie dann wieder die o.a. Fragen.

□

Beispiel 8 Ein Beispiel für rotatorische Unwucht ist die Reifen/Rad-Kombination an Kraftfahrzeugen. Ein vereinfachtes Modell ist in Abb. 2.25 dargestellt.

Die Masse  $M$  vereinigt alle festen Teile (Bremsen, Streben, etc.), die Masse  $m$  alle beweglichen Teile (Felge, Reifen). Die Feder-Dämpfer-Kombination ( $c$ ,  $k_2$ ) repräsentiert die Radaufhängung, die Feder  $k_1$  stellt die Reifensteifigkeit dar. Der Schwerpunkt der Masse  $m$  habe eine (Unwucht-)Exzentrizität  $e$  von der Drehachse, die bei bestimmten Drehzahlen des Rades (d.h. Fahrgeschwindigkeiten) unangenehme Resonanzerscheinungen verursacht.

Gesucht ist die maximale Unwucht-Amplitude und die Geschwindigkeit, bei der sie auftritt. Folgende Zahlenwerte seien gegeben:  $M = 20$  kg,  $m = 15$  kg,  $k_1 = 1.8 \times 10^5$  N/m,  $k_2 = 2 \times 10^4$  N/m,  $c = 265$  Ns/m (der Dämpfer sei beschädigt!),  $e = 2$  mm. Der Bodenabstand der Radnabe beträgt  $h = 0.28$  m.

Zunächst ist die Eigenfrequenz des Gesamtsystems  $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{200,000/35} = 75.59$  rad/s und das Dämpfungsverhältnis  $\zeta = c/2\sqrt{km} = 265/2\sqrt{200,000 \times 35} = 0.05$  und damit erhält man die Amplitude  $X$  mit Gl. (2.3.41) und Gl. (2.3.38)

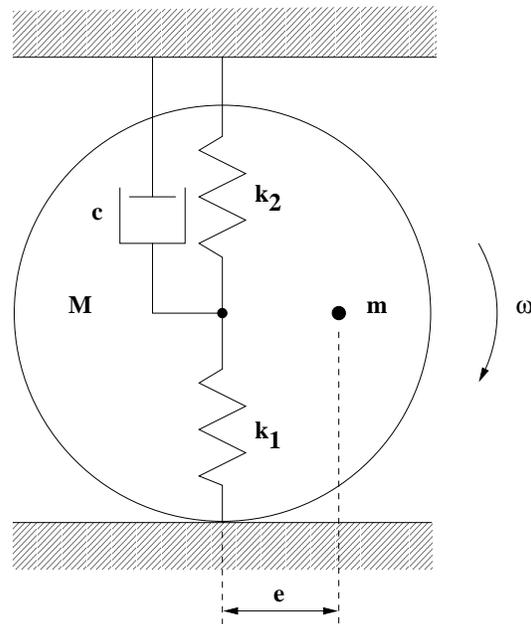


Abbildung 2.25: Rad/Reifen-Kombination

bei  $\eta_{\max} = 1/\sqrt{1-2\zeta^2} = 1.0025$  zu

$$X = \frac{em}{M+m} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = 8.57 \text{ mm.}$$

Die Amplitude tritt bei  $\omega_{\max} = r\omega_n = 75.78 \text{ rad/s}$  auf, was folgender Fahrgeschwindigkeit entspricht:

$$v = h\omega_{\max} = 0.28 \times 75.78 = 21.2 \text{ m/s.}$$

□

Beispiel 9 Die Fläche einer Kraft-Dehnungs-Schleife betrage  $\Delta E = 2.5 \text{ Nm}$  und die maximale Auslenkung  $X = 8 \text{ mm}$ . Aus der Steigung der Schleife läßt sich die Steifigkeit zu  $k = 5 \times 10^4 \text{ N/m}$  ermitteln.

Berechnen Sie den Koeffizienten  $\beta$  der Hysterese-Dämpfung und den der äquivalenten viskosen Dämpfung, wenn das System bei  $10 \text{ Hz}$  betrieben wird.

Hysterese-Dämpfung:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \pi k \beta X^2 \\ 2.5 &= \pi \times 5 \times 10^4 \beta \cdot 0.008^4 \\ \Rightarrow \beta &= 0.294 \end{aligned}$$

Viskose Dämpfung:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \frac{k\beta}{\omega} \\ &= \frac{5 \times 10^4 \cdot 0.294}{20\pi} \\ \Rightarrow \hat{c} &= 198 \text{ kg/s}\end{aligned}$$

□

Beispiel 10 Berechnung der Resonanz-Amplitude für quadratische Dämpfung:

Aus Beziehung (2.3.16) wird für  $\omega = \omega_n$ , d.h.  $\eta = 1$ , und mit Ausdruck (2.3.44)

$$X = \frac{f_0}{2\zeta\omega^2} = \frac{f_0}{\hat{c}\omega} = \frac{f_0}{8/(3\pi)\alpha\omega^2 X}$$

und daraus

$$X = \sqrt{\frac{3\pi f_0}{8\alpha\omega^2}} = \sqrt{\frac{3\pi f_0 m}{4k c_w \rho A}}. \quad (2.3.49)$$

□

Beispiel 11 Stabilitätsbedingungen:

1. Die Stabilität eines Systems wird nur durch seine Eigenbewegung charakterisiert.
2. Ein System ist dann und nur dann stabil, wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms negativen Realteil haben.
3. Das charakteristische Polynom  $q(s)$  ist der Nenner der Übertragungsfunktion des Systems.
4. Im Fall des gedämpften mechanischen Systems mit einem Freiheitsgrad ist

$$q(s) = ms^2 + cs + k \quad (2.3.50)$$

Die Nullstellen  $s_{1,2}$  der Gl. (2.3.50) sind

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}.$$

Diese haben negativen Realteil wenn alle Polynomkoeffizienten ( $m, c, k$ ) positiv (oder negativ — was im physikalischen Kontext sinnlos ist) sind.

Aufgabe: Versuchen Sie diese Aussage zu beweisen.

□

Beispiel 12 Ein Stahlkamin mit der Höhe  $h = 20$  m, dem Außendurchmesser  $d_a = 0.80$  m und dem Innendurchmesser  $d_i = 0.75$  m werde von Wind angeblasen.

Bei welcher Windgeschwindigkeit  $v$  führt die Wirbelanregung zu Resonanz?

Die Grundeigenfrequenz  $\omega_1$  eines einseitig eingespannten Balkens ist

$$\omega_1 = (\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4 A}}, \quad (2.3.51)$$

mit  $l = h$  und  $\beta_1 l = 1.875$  [40, Seite 527].

Für Stahl gilt  $E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  und  $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , und es sind  $A = (d_a^2 - d_i^2)\pi/4 = 0.06087 \text{ m}^2$  und  $I = (d_a^4 - d_i^4)\pi/64 = 0.00457 \text{ m}^4$  und damit

$$\omega_1 = 1.875^2 \sqrt{\frac{(2.07 \times 10^{11})(0.00457)}{(7.9 \times 10^3)(0.06087)(20)^4}} = 12.415 \text{ rad/s} = 1.976 \text{ Hz}.$$

Die Frequenz der Wirbelbildung ist nach Gleichung (2.3.47)  $fd = 0.21v$  und damit

$$v = \frac{fd}{0.21} = \frac{1.976 \times 0.8}{0.21} = 7.53 \text{ m/s}.$$

□

Übung 10 Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das in Abb. 2.26 gezeichnete mechanische System auf und bestimmen Sie die stationäre Lösung. Die Masse  $m$  ist homogen verteilt. Das System werde harmonisch angeregt mit  $M(t) = M_0 \sin \omega t$ .

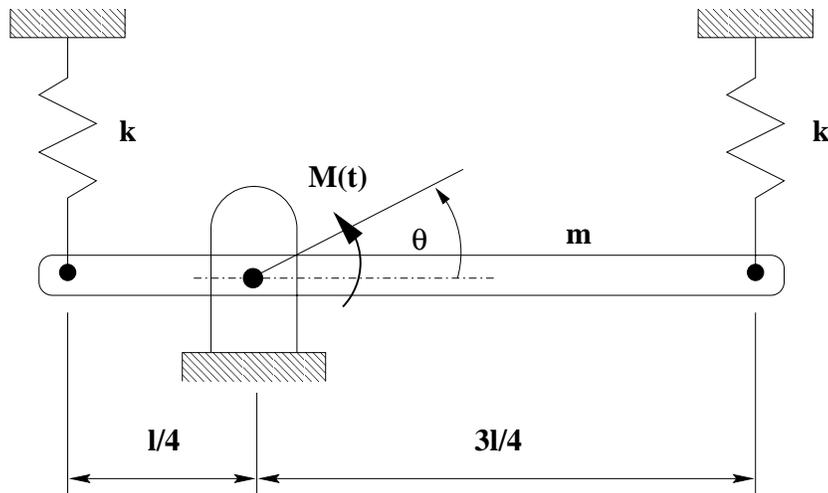


Abbildung 2.26: Ungedämpftes mechanisches System

Numerische Werte sind:  $l = 1 \text{ m}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $M_0 = 100 \text{ Nm}$ ,  $k = 5000 \text{ N/m}$ ,  $\omega = 1000 \text{ U/min}$ .

□

Übung 11 Die Konfiguration der Basisanregung sei wie in Abb. 2.27 dargestellt, d.h. die anregende Bewegung wird über einen Dämpfer auf die Masse übertragen. Die obere Abstützung sei inertial fest angenommen.

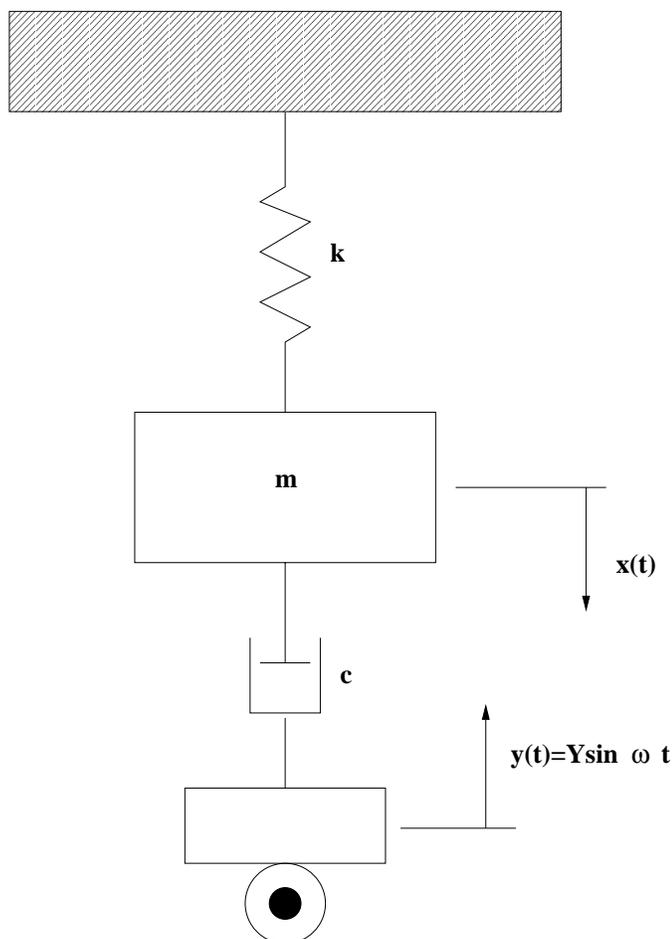


Abbildung 2.27: Modifizierte Basisanregung

Welche Kraft wird im stationären Zustand auf die Masse übertragen? Skizzieren Sie auch den Amplitudengang.

□

Übung 12 Ein Kraftfahrzeug der Masse  $m$  kg fahre über eine unebene Straße, die sinusförmig mit Wellenlänge  $\lambda = 6$  m und Amplitude  $Y = 0.1$  m angenähert sei. Die KFZ-Aufhängung bestehe aus Feder ( $k = 4 \times 10^5$  N/m) und Dämpfer ( $c = 20 \times 10^3$  Ns/m).

Berechnen Sie die Erregerfrequenz  $\omega$  als Funktion der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  und die Fahrzeugamplitude  $X$  als Funktion der Fahrzeugmasse  $m$ . Vergleichen



□

### Übung 14 Selbsterregte Schwingungen

Das dynamische Eigen-Verhalten einer Flugzeugtragfläche sei sehr einfach durch

$$m\ddot{x} + c_0\dot{x} + kx = 0 \quad (2.3.53)$$

mit  $m, c_0, k > 0$  beschrieben. Die Bewegung induziert aerodynamische Kräfte der Form  $c_1\dot{x}$ .

- 1) Wie verändern diese die Bewegungsgleichung (2.3.53)?
- 2) Welcher Bedingung muß  $c_1$  genügen, damit das selbsterregte System stabil bleibt?
- 3) Ist die modifizierte Bewegungsgleichung aus 1) linear?
- 4) Geben Sie geeignete Anfangs- und/oder Randbedingungen an, um die Bewegungsgleichung zu lösen.
- 5) Transformieren Sie die modifizierte Bewegungsgleichung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{z} = \mathbf{A}z + \mathbf{b}u \quad (2.3.54)$$

für den Zustandsvektor  $(z_1, z_2)^T = (x, \dot{x})^T$ .

- 6) Welche Elemente hat die Matrix  $\mathbf{A}$ ?
- 7) Welche Rolle spielt in unserem Fall der Vektor  $\mathbf{b}$ ?
- 8) Lösen Sie Gleichung (2.3.54).

□

Übung 15 Das mechanische System der Übung 10 werde nun durch einen Dämpfer mit dem Dämpfungsbeiwert  $c = 1000 \text{ Ns/m}$  ergänzt, wie in Abb. 2.29 dargestellt.

Wie lautet nun seine Bewegungsgleichung und deren stationäre Lösung?

□

## 2.4 Nicht-harmonische Anregungsfunktionen

Neben den soeben ausführlich behandelten harmonischen Anregungen spielen allgemeine Anregungsfunktionen, wie die Impulsfunktion, die Sprungfunktion, die Rampenfunktion und Kombinationen aus diesen, wie die Treppenfunktion oder die Sägezahnfunktion eine große Rolle. Letztenendes lassen sich diese Funktionen über die Fourier-Transformation[29] beliebig nahe als harmonische Funktionen approximieren.

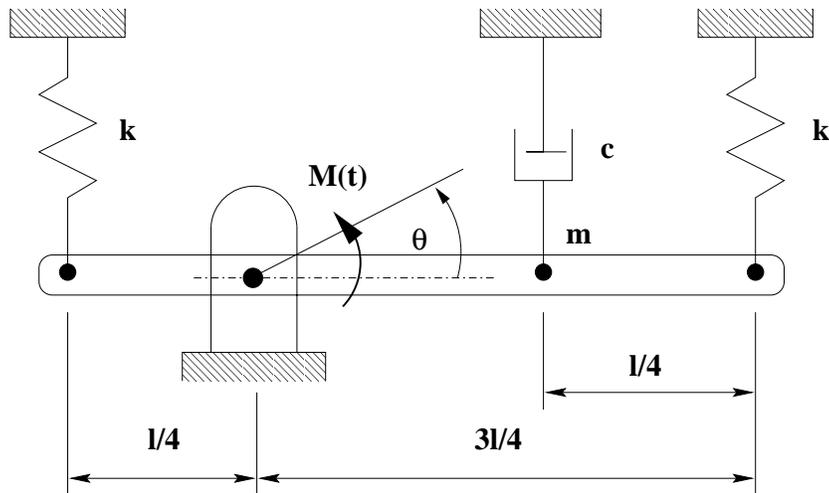


Abbildung 2.29: Gedämpftes mechanisches System

Wir werden in diesem Abschnitt häufig von der Laplace-Transformation des Abschnittes A Gebrauch machen.



## 2.4.1 Sprung-Funktion

### 2.4.1.1 Sprungfunktion im Zeitbereich

Die Sprungfunktion<sup>15</sup> als Anregungsfunktion für ein mechanisches System tritt beispielsweise auf, wenn Sie als Radfahrer über einen Bordstein fahren. Sie ist dargestellt in Abb. 2.30 und wird definiert als

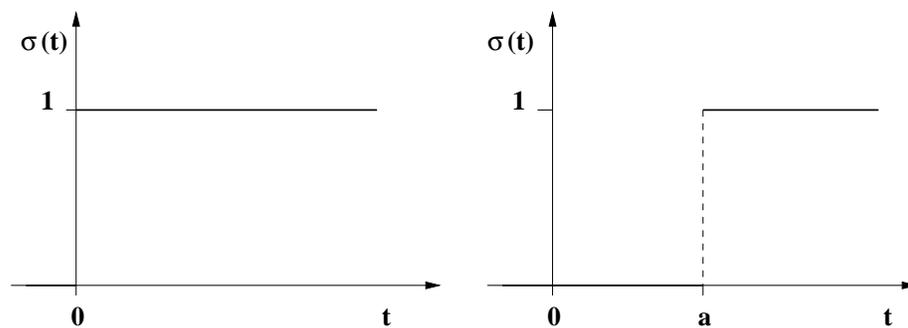


Abbildung 2.30: Sprung-Funktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

<sup>15</sup>Sie wird auch Heaviside-Funktion genannt, nach dem englischen Physiker Oliver Heaviside, 1850–1925.

und allgemein:

$$\sigma(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ 1 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

#### 2.4.1.2 Sprungfunktion im Frequenzbereich

Die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}\{\sigma(t - a)\}$  ist

$$\Sigma = \mathcal{L}\{\sigma(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0), \quad (2.4.2)$$

was leicht mittels der Definition der Laplace-Transformation beweisbar ist:

Beweis: Nach Definition der Regel 2 auf Seite 158 ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sigma(t - a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sigma(t - a) dt \\ &= \int_0^a e^{-st} \times 0 \times dt + \int_a^{\infty} e^{-st} \times 1 \times dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned}$$

□

#### 2.4.1.3 Anwendung

Es soll nun der Einfluß einer sprungförmigen Anregung  $f(t)$  auf ein gedämpftes mechanisches System mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation untersucht werden:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

wird Laplace-transformiert

$$m(s^2 X(s) - sx_0 - \dot{x}_0) + c(sX(s) - x_0) + kX(s) = F(s),$$

woraus

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{m\dot{x}_0 + (ms + c)x_0}{ms^2 + cs + k} + \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} \\ &= X_h(s) + X_p(s) \\ &= \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}_0 + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x_0 \\ &\quad + \frac{F(s)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

folgt, wobei  $F(s)$  die Laplace-Transformierte der Anregungsfunktion  $f(t)$  ist. Die Gesamtlösung  $X(s)$  setzt sich auch im Bild- oder Frequenzbereich mit der Variablen  $s$  wieder additiv aus der homogenen Lösung  $X_h(s)$  und der partikulären Lösung  $X_p(s)$  zusammen.

Wenn die Anfangsbedingungen Null sind, wird der Quotient aus Ausgangsfunktion  $X_p(s)$  und Eingangsfunktion  $F(s)$  als Übertragungsfunktion  $G(s)$  bezeichnet:

$$G(s) \triangleq \frac{X_p(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}.$$

Zunächst wird also  $X(s)$  im Frequenzbereich gebildet, und daraufhin wird die gesuchte Lösung  $x(t)$  im Zeitbereich durch inverse Laplace-Transformation gewonnen.<sup>16</sup>

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}.$$

Dieser Schritt ist nun für  $X(s)$  in Gleichung (2.4.3) durchzuführen: Die erste Zeile wird in Tab. A.1 ausgelesen, die zweite Zeile wird mit Hilfe von Gl. (A.2.6) gelöst, nachdem

$$\frac{F(s)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

in die Faktoren  $F_1(s) = F(s)$  und

$$F_2(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

faktorisiert wird, deren inverse Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \int_0^t f(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t-\tau)) d\tau$$

ist. Damit wird

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi) \\ &+ \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \\ &+ \frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \int_0^t f(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

mit  $\phi = \arccos \zeta$ . Der dritte Summand dieser Beziehung ist ein Duhamel- oder Faltungsintegral.

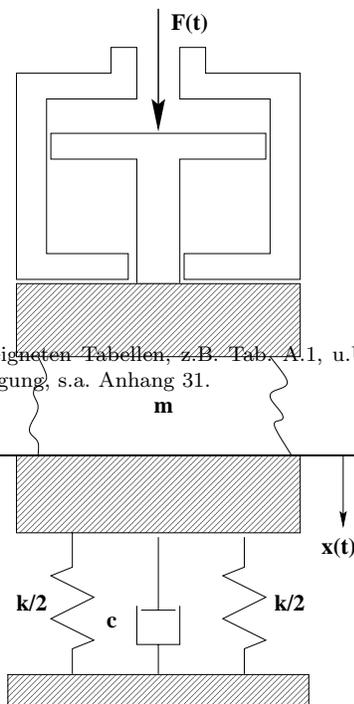
Jetzt soll das Integral in der Lösung (2.4.4) noch für die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t < t_0 \\ 0 & t_0 \leq t \end{cases}$$

ausgewertet werden. Das geschieht wieder im Bildbereich, also Gl. (2.4.3); die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}[f(t)]$  ist

$$F(s) = \frac{F_0}{s} - \frac{F_0 e^{-t_0 s}}{s}.$$

<sup>16</sup>Zumeist geschieht dies durch Nachschlagen in geeigneten Tabellen, z.B. Tab. A.1, u.U. nach vorheriger Vereinfachung durch Partialbruchzerlegung, s.a. Anhang 31.



Der homogene Anteil (die ersten beiden Summanden) in Gl. (2.4.3) ändert sich nicht, also braucht nur der dritte Summand betrachtet zu werden:

$$X_p(s) = \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{ms(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

und dieser wird mit Tab. A.1 und Gl. (A.2.5)

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left( 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi) \right) \\ &\quad - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left( 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t-t_0) + \phi) \right) \\ &= \frac{F_0}{m\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n^2} \left[ -e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t-t_0) + \phi) \right], \end{aligned}$$

mit  $\phi = \arccos \zeta$ . In der nebenstehenden Abbildung ist ein entsprechendes Modell einer Kompaktifizierungsanlage dargestellt.

Beispiel 13 *Gegeben sei folgendes System:*

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = f(t), \quad \dot{x}_0 = 0, x_0 = 0,$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$$

Es sind  $\omega_n = \sqrt{2}$  und  $\zeta = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1$  und mit

$$\hat{f} = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$$

erhält man

$$X(s) = G(s) (e^{-s} - e^{-2s})$$

mit

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

und nach Partialbruchzerlegung, siehe Anhang A.3

$$G(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}.$$

Die inverse Laplace-Transformation von  $G(s)$  ergibt nach Tab. A.1

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

und damit mit Gl. (A.2.5)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1} [e^{-s}G(s) - e^{-2s}G(s)] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} [e^{-s}G(s)] - \mathcal{L}^{-1} [e^{-2s}G(s)] \\
 &= \left( \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} \right) \sigma(t-1) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{2} + e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} \right) \sigma(t-2)
 \end{aligned}$$

was abschnittsweise geschrieben

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 1, \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & 1 \leq t < 2, \\ e(e-1)e^{-t} + \frac{e^2(1-e^2)}{2}e^{-2t} & 2 \leq t \end{cases}$$

bedeutet.

Die Antwort des Systems, wieder mit **MuPAD** mit dem nachfolgenden File gewonnen, ist in Abb. 2.31 dargestellt. Dort ist auch der Graph der Impulsantwort (Pulsbreite=0) des Systems mit eingetragen.

```

f:=proc(t) begin
if t<1 then 0;
elif t<2 then
1/2-exp(-(t-1))+1/2*exp(-2*(t-1));
else
-exp(-(t-1))+1/2*exp(-2*(t-1))+exp(-(t-2))-1/2*exp(-2*(t-2));
end_if;
end_proc;
plot2d(Axes=Origin,Scaling=UnConstrained,Ticks=5,
Labeling=TRUE,Labels=["", ""], [Mode=Curve, [t,hold(f(t))],
t=[0,10],Grid=[100],Style=[Lines]]);

```

□

Aufgabe 16 Wiederholen Sie Beispiel 13 für ein unterdämpftes System mit  $\zeta < 1$  mit z.B.  $q(s) = s^2 + 2s + 2$  und für ein kritisch gedämpftes System mit  $\zeta = 1$  mit z.B.  $q(s) = s^2 + 2\sqrt{2}s + 2$ .

□

## 2.4.2 Impuls-Funktion

Eine Impulsfunktion liegt vor, wenn ein hoher Kraft- oder Momenten-Impuls über eine sehr kurze Zeit erfolgt, z.B. ein Hammerschlag auf ein massives Werkstück oder der Stoß zweier Billiard-Kugeln. In elektrotechnischen Systemen geschieht die schnelle Aufladung eines Kondensators durch eine Stromquelle impulsförmig.

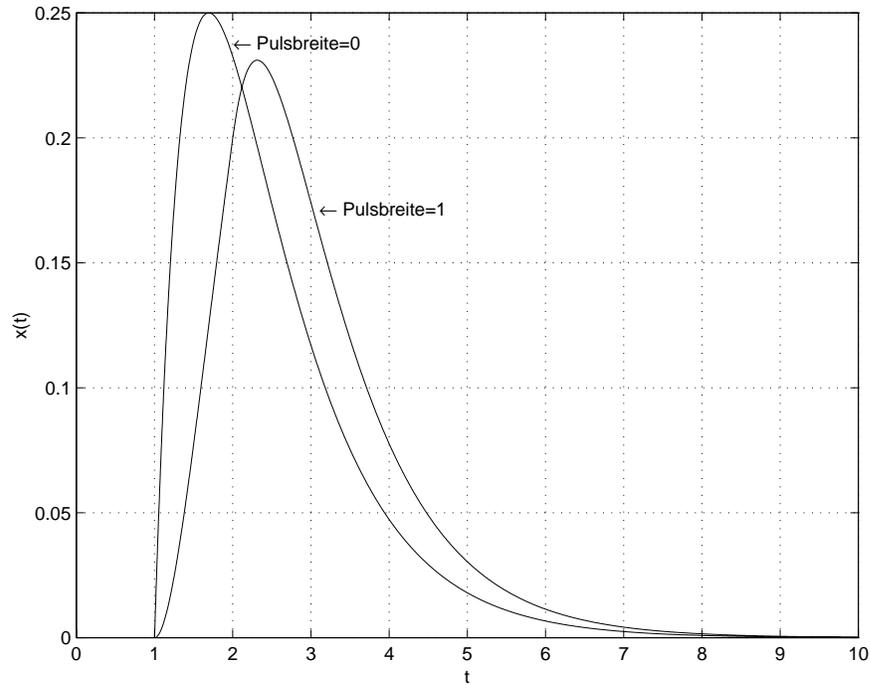


Abbildung 2.31: Antwort auf einen endlichen Impuls

#### 2.4.2.1 Impulsfunktion im Zeitbereich

Die Impulsfunktion gehört, mathematisch betrachtet, zu den verallgemeinerten Funktionen, den sogenannten Distributionen. Eine Modellvorstellung erhält man durch Abb. 2.32, in der ein Rechteck-Impuls mit der Breite  $2\epsilon$  und der Höhe  $\hat{F}/(2\epsilon)$  dargestellt ist, wobei  $\epsilon \ll 1$  eine kleine Zahl sein soll.

Die Impulsfunktion  $I(\epsilon)$  ergibt sich aus der Abbildung als bestimmtes Integral der Kraft

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau - \epsilon \\ \frac{\hat{F}}{2\epsilon} & \tau - \epsilon \leq t \leq \tau + \epsilon \\ 0 & t > \tau + \epsilon \end{cases}$$

und damit

$$I(\epsilon) = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{\hat{F}}{2\epsilon} 2\epsilon = \hat{F}.$$

Zusammenfassend sind die beiden wichtigen Eigenschaften der Impulsfunktion:

1. 
$$F(t - \tau) = 0, \quad t \neq \tau \quad (2.4.5)$$

2. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) dt = \hat{F}. \quad (2.4.6)$$

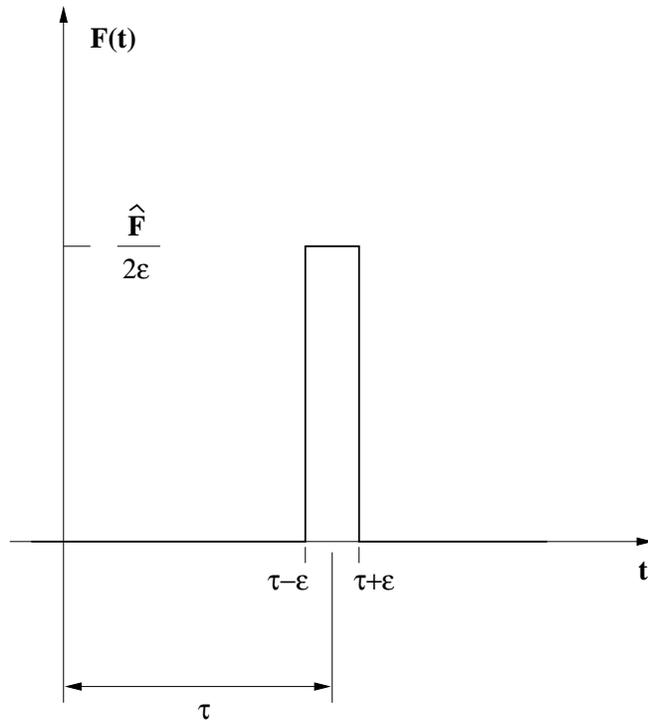


Abbildung 2.32: Impuls-Funktion

Ist  $\hat{F} = 1$ , dann spricht man vom Dirac-Impuls.<sup>17</sup>

#### 2.4.2.2 Impulsfunktion im Frequenzbereich

Die Impulsfunktion kann auch als Differenz zweier Sprungfunktionen gesehen werden:

$$f_k(t) = \frac{1}{k} (\sigma(t - t_0) - \sigma(t - (t_0 + k))).$$

Deren Laplace-Transformierte ist

$$\mathcal{L}[f_k(t)] = \frac{1}{ks} (e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+k)s}) = e^{-t_0 s} \frac{1 - e^{-ks}}{ks}. \quad (2.4.7)$$

Der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k(t) = \delta(t - t_0)$$

ist wiederum der Dirac'sche Delta-Impuls mit den Eigenschaften

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = t_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.4.8)$$

---

<sup>17</sup>Paul Dirac (1902–1984), Englischer Physiker; erhielt 1933 den Nobel-Preis für seine Arbeiten zur Quanten-Mechanik.

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (2.4.9)$$

Nach Beziehung (2.4.7) ist dessen Laplace-Transformierte allgemein

$$\Delta = \mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s} \quad (2.4.10)$$

und speziell für  $t_0 = 0$ :

$$\Delta(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (2.4.11)$$

### 2.4.2.3 Anwendung

Nun sei das Beispiel 13 mit  $f(t) = \delta(t - t_0)$  wiederholt.

Es ist

$$X(s) = G(s)e^{-t_0 s}$$

mit

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

deren inverse Laplace-Transformierte

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-t} - e^{-2t}$$

ist, und damit die Lösung, s.a. Tab. A.1, Zeile 7,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-t_0 s} G(s)] = g(t - t_0) \sigma(t - t_0)$$

und abschnittsweise:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0, \\ e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & t_0 < t. \end{cases}$$

Für  $t_0 = 1$  ist der Lösungsgraph in Abb. 2.31 mit eingetragen.

*Beispiel 14 Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das in Abb. 2.33 dargestellte Flaschenzugsystem auf, das durch eine Kraft  $f(t) = F_0 e^{-t}$  angetrieben wird.*

*Lösen Sie die Bewegungsgleichung. Folgende Daten sind anzunehmen:  $m = 10$  kg,  $J_0 = 1$  kgm<sup>2</sup>,  $F_0 = 50$  N,  $k_1 = 1000$  N/m,  $k_2 = 500$  N/m,  $r = 5$  cm.*

*Das Momentengleichgewicht um den Aufhängungspunkt 'O' ergibt*

$$J_0 \ddot{\theta}(t) + 2rm\ddot{x}(t) + 2rk_1 x(t) + \eta^2 k_2 \theta(t) = 2rF_0 e^{-t}.$$

*Mit  $\theta = x/(2r)$  wird*

$$\left(\frac{J_0}{2r} + 2rm\right) \ddot{x}(t) + \left(2rk_1 + \frac{rk_2}{2}\right) x(t) = 2rF_0 e^{-t}$$

*erhalten, was mit den gegebenen Daten auf*

$$11.0\ddot{x}(t) + 112.5x(t) = 5e^{-t}$$

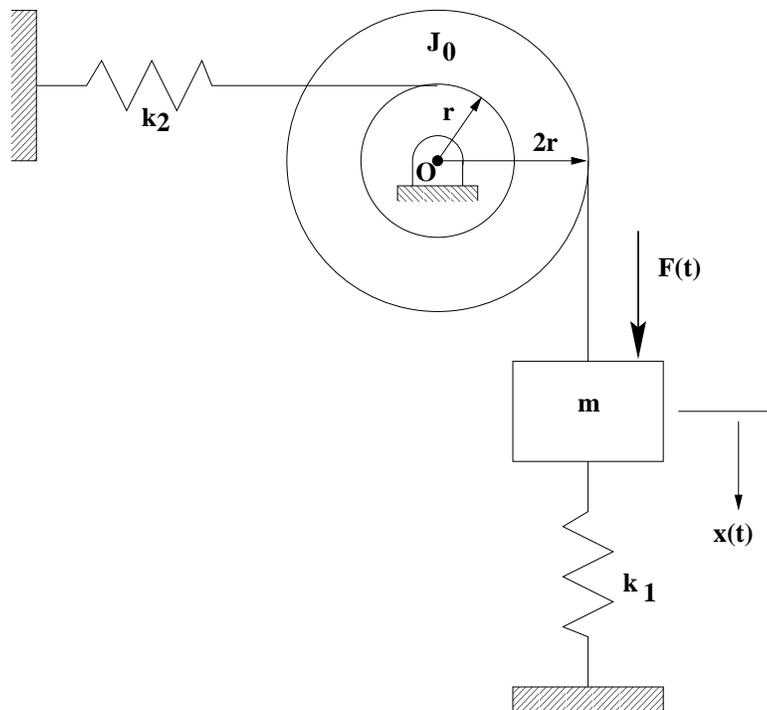


Abbildung 2.33: Flaschenzug

führt. Es handelt sich um ein ungedämpftes System mit  $\omega_n = \sqrt{112.5/11.0} = 3.198 \text{ rad/s}$ .

Dieses Problem soll uns Maple[24],[35],[41] in der allgemeinen Fassung

$$m\ddot{x} + kx = Fe^{-t}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 0$$

lösen. Alle Computer-Algebra-Systeme (CAS)<sup>18</sup> können ihre Sitzungen komfortabel nach  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  oder  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  exportieren. Hier ein Beispiel:<sup>19</sup>

- > assume(m>0);
- > assume(k>0);
- > assume(F>0);
- > deq:=m\*diff(x(t),t,t)+k\*x(t)=F\*exp(-t);

$$\text{deq} := m \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) \right) + k x(t) = F e^{-t}$$

- > ini:=D(x)(0)=0,x(0)=0;

$$\text{ini} := D(x)(0) = 0, x(0) = 0$$

<sup>18</sup>Als drittes System sei noch Mathematica[50] genannt.

<sup>19</sup>Die assume-Funktion legt einen Wertebereich für die Variable fest, z.B.  $m, k, F > 0$ , womit die Physik der Mathematik beim Lösen hilft.

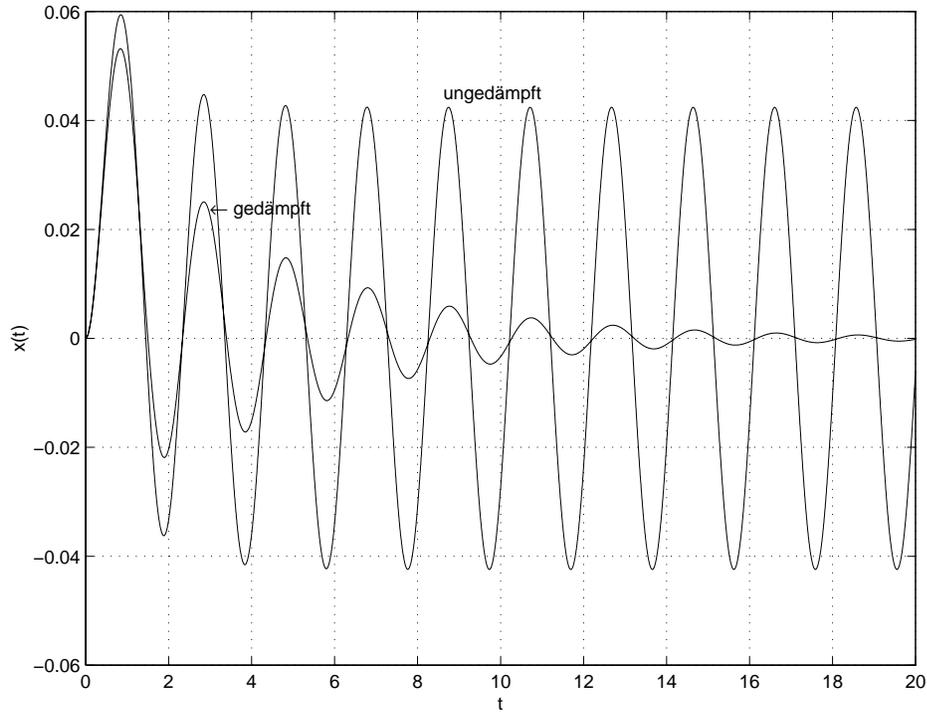


Abbildung 2.34: Harmonische und gedämpfte Schwingung

> `dsolve(deq,ini,x(t));`

$$x(t) = \frac{F \tilde{e}^{-t}}{m \tilde{+} k \tilde{}} - \frac{F \tilde{\cos} \left( \frac{\sqrt{m \tilde{k} \tilde{t}}}{m \tilde{}} \right)}{m \tilde{+} k \tilde{}} + \frac{F \tilde{m} \tilde{\sin} \left( \frac{\sqrt{m \tilde{k} \tilde{t}}}{m \tilde{}} \right)}{\sqrt{m \tilde{k} \tilde{}} (m \tilde{+} k \tilde{})}$$

Für die o.a. numerischen Werte ergibt sich dann der Graph in Abb. 2.34. Interpretieren Sie den Graphen!

□

Aufgabe 17 Lösen Sie das voranstehende Beispiel mit Bleistift und Papier. Wenn Sie die Laplace-Transformation verwenden, dann werden Sie Ihr Ergebnis mit dem von **MuPAD** vergleichen wollen. Verwenden Sie dazu die Funktionen `transform::laplace` bzw. `transform::ilaplace`.

□

Aufgabe 18 Fügen Sie nun in Abb. 2.33 parallel zur Feder  $k_2$  einen Dämpfer mit dem Dämpfungsbeiwert  $c = 100 \text{ Ns/m}$  ein. Leiten sie die Bewegungsgleichung her und lösen Sie sie. Je nach Dämpfungsbeiwert könnte der Graph wie in Abb. 2.34 eingetragen aussehen.

□

### 2.4.3 Allgemeine Anregung

#### 2.4.3.1 Impulsantwort

Die Impulsantwort  $h(t)$  ist die Antwort (Lösung der Systemgleichung)  $x(t)$  eines linearen dynamischen Systems, z.B.  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ , auf den Dirac-Impuls  $f(t) = \delta$ .

Im Frequenzbereich wird das System durch die Übertragungsfunktion  $G(s) = X(s)/F(s)$  beschrieben. Da für  $f(t) = \delta$  die Beziehung (2.4.11)  $F(s) = \Delta = 1$  gilt, stimmt formal die Impulsantwort  $H(s) = X(s) = G(s)F(s)$  im Frequenzbereich mit ihrer Übertragungsfunktion überein:  $H(s) = G(s)$ . Merke aber: Während  $H(s)$  eine Lösung(sfunktion) ist, ist  $G(s)$  der Quotient zweier Systemgrößen.



#### 2.4.3.2 Lösung der Bewegungsgleichung

Zunächst sei die Impulsantwort betrachtet:

Impulsantwort

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t),$$

die von  $t = 0$  bis  $t = \Delta$  integriert werde:

$$m[\dot{x}(\Delta) - \dot{x}(0)] + c[x(\Delta) - x(0)] + k \int_0^\Delta x(t) dt = 1.$$

Aus physikalischen Gründen darf für den Grenzübergang  $\Delta \rightarrow 0$  der zweite und dritte Summand der linken Seite keinen Beitrag leisten, ansonsten müßte gelten  $x(\Delta) \rightarrow \infty$ , also:

$$m[\dot{x}(\Delta) - \dot{x}(0)] = 1,$$

und mit  $\dot{x}(0) = 0$ :

$$\dot{x}(\Delta) = \frac{1}{m}.$$

Aus dieser Überlegung folgt, daß eine impulsförmige Systemanregung äquivalent ist zur Eigenbewegung des Systems mit  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1/m$ .

Jetzt sei noch einmal die gedämpfte Eigenbewegung aus Abschnitt 2.2.2.3, Gl. (2.2.12), betrachtet:

Eigenbewegung

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( A_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + A_2 \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right).$$

Für  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1/m$  erhält man nach kurzer Rechnung:

$$h(t) = x(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin(\omega_d t),$$

welches wegen der gewählten Anfangsbedingungen auch die Impulsantwort  $h(t)$  ist.

Nun sei die allgemeine Anregung  $f(t)$  betrachtet. Wir integrieren von  $t = 0$  bis

Anregung  $f(t)$

$t = \Delta$  und lassen in diesem Zeitraum  $f = f(0)$  konstant, dann gilt für

$$x(t) = f(0)\Delta h(t).$$

Wir wiederholen diesen Schritt von  $t = \Delta$  bis  $t = 2\Delta$ :

$$x(t) = f(0)\Delta h(t) + f(\Delta)\Delta h(t - \Delta),$$

und weiter:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i\Delta)h(t - i\Delta)\Delta.$$

 Der Grenzübergang  $\Delta \rightarrow 0$  ergibt für  $n \rightarrow \infty$  Impulsantworten:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (2.4.12)$$

Das Integral in Gl. (2.4.12) ist ein Faltungsintegral.<sup>20</sup> Bisher waren beide Anfangsbedingungen zu Null gesetzt, d.h.  $x_p(t) = x(t)$ .

Anwendung Mit der Impulsantwort für, z.B. das unterdämpfte System  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta$ ,

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) \quad (2.4.13)$$

wird Gl. (2.4.12)

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \int_0^t f(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau. \quad (2.4.14)$$

Beispiele mit Lösungen dieses Integrals für diverse  $f(t)$  finden Sie in Abschnitt 3.2.3.

Beispiel 15 *Es soll das gedämpfte System  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \sigma(t)$ , mit  $\sigma(t)$  dem Einheitsprung (2.4.1) als Anregung und mit Anfangsbedingungen zu Null gesetzt, berechnet werden.*

Das Integral in Gl. (2.4.14) ist für  $t \geq 0$  auszuwerten, d.h. in diesem Fall ist  $f = 1$ , und Maple löst uns das Integral wie folgt:<sup>21</sup>

```
> int(exp(zeta*omega*tau)*
> sin(sqrt(1-zeta^2)*omega*(t-tau)), tau=0..t);
```

$$\int_0^t e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} e^{(\zeta\omega_n t)}}{\omega_n} - \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) + \zeta \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t)}{\omega_n}$$

<sup>20</sup>Englisch: convolution integral.

<sup>21</sup>Die weitere Umwandlung in die Form  $\sin(\omega_d t + \phi)$  muß man noch per Hand erledigen; Anfrage bei Waterloo Software läuft.

Dieses Ergebnis in Gl. (2.4.14) eingesetzt führt zu

$$x(t) = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

mit

$$\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}.$$

□

Die Gesamtlösung  $x(t) = x_h + x_p$  des Systems

Gesamtlösung

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

ist mit Gl. (2.2.12) für den unterdämpften Fall,  $0 < \zeta < 1$ ,

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) + \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \int_0^t f(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau, \quad (2.4.15)$$

mit

$$\phi = \arctan \frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}.$$

## 2.4.4 Numerische Lösung

### 2.4.4.1 Approximation der Anregung

In Abb. 2.35 ist eine allgemeine Anregungsfunktion abgebildet und dazu ihre Approximation durch eine Treppenfunktion. Mit dieser Idee sind lineare dynamische Systeme, die durch allgemeine Erregerfunktionen angetrieben werden, abschnittsweise durch Laplace-Transformation und Anregung durch Sprungfunktionen (jeweils die Differenz zur vorangegangenen Treppe, die natürlich auch negativ sein kann) und nachfolgende inverse Laplace-Transformation lösbar.

Die Approximation der Anregungsfunktion durch eine (abschnittsweise konstante) Treppenfunktion ist eine (grobe) Approximation nullter Ordnung und liefert nur dann brauchbare Ergebnisse, wenn die Zeitachse genügend fein diskretisiert wird, was einen hohen rechnerischen Aufwand zur Folge hat.

Approximationen höherer Ordnung (Polygonzug, Spline-Funktionen, etc.) lassen eine gröbere Diskretisierung der Zeitachse zu [12],[39].

### 2.4.4.2 Numerische Lösung

Ein alternativer Zugang, dynamische Systeme mit allgemeinen Anregungsfunktionen zu lösen, ist die numerische Integration mit Lösungsverfahren für An-

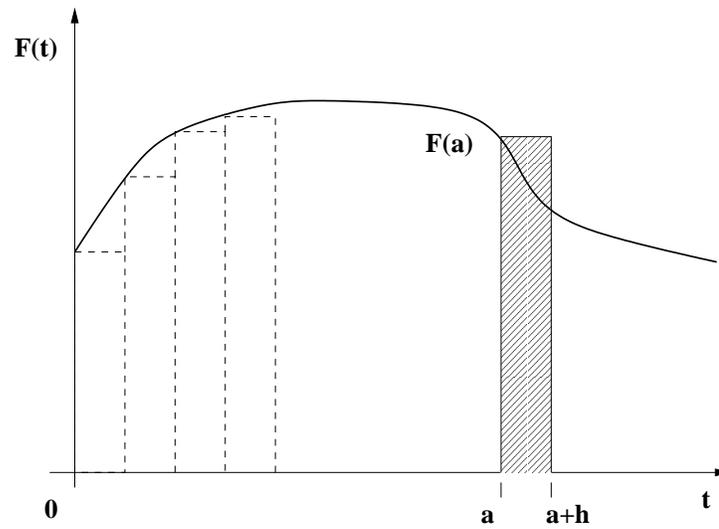


Abbildung 2.35: Numerische Lösung

fangswertprobleme, für die eine Vielzahl von Verfahren, Methoden und Softwarepaketen zur Verfügung steht [23].<sup>22</sup> Eine kurze Einführung ist in Anhang D zusammengefaßt.

---

<sup>22</sup>Im Internet ist die `netlib` mit der URL '<http://www.netlib.org/liblist.html>' eine unerschöpfliche Quelle freier Software.

---

# Kapitel 3

## Zwei-Freiheitsgrad-Systeme

### 3.1 Eigenbewegung

#### 3.1.1 Ungedämpfte Eigenbewegung

##### 3.1.1.1 Modellbildung

Die Modellbildung für ein Zwei-Freiheitsgrad-System wird anhand der freigeschnittenen Massen in Abb. 3.1 mittels des 2. Gesetzes von Newton durchgeführt.

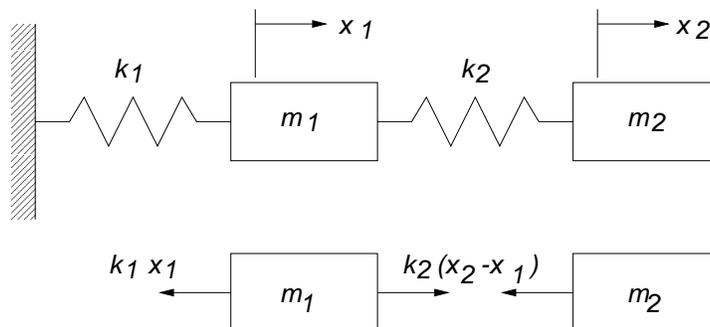


Abbildung 3.1: Zwei-Freiheitsgrad-System

Es gilt für jede Masse  $m_i$  das Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

und umgeformt:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein System von zwei miteinander gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Um sie eindeutig lösen zu können, müssen je zwei Anfangsbedingungen als Integrationskonstanten gegeben sein:  $x_1(0) = x_{1_0}$ ,  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{1_0}$  und  $x_2(0) = x_{2_0}$ ,  $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_{2_0}$ . Das Gleichungssystem kann folgendermaßen in Matrix-Vektor-Form geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

oder abgekürzt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.1.2)$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ist ein Spaltenvektor, der (um Raum zu sparen) im Text zum Zeilenvektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)'$  transponiert wird. Die Anfangswertvektoren sind

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}$$

Übung 16 *Bestimmen Sie Massen- und Steifigkeitsmatrix für die in Abb. 3.2 dargestellte Beispielkonfiguration.*

□

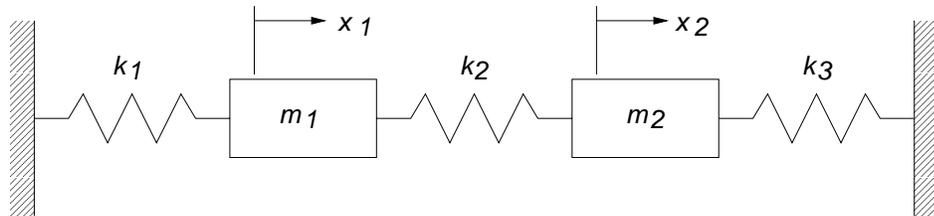


Abbildung 3.2: Zwei-Freiheitsgrad-System

### 3.1.1.2 Lösung der Matrix-Differentialgleichung

3.1.1.2.1 Lösungsansatz Wie im Fall des Ein-Freiheitsgrad-Systems, s.a. Gl. (2.1.2), wird auch hier ein harmonischer Lösungsansatz verwendet:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{j\omega t}. \quad (3.1.3)$$

Zweimalige Differentiation des Ansatzes (3.1.3) und Einsetzen in Gl. (3.1.2) ergibt folgende Gleichung:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u} e^{j\omega t} = \mathbf{0}, \quad (3.1.4)$$

oder, da  $e^{j\omega t} \neq 0, \forall t$ ,

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.1.5)$$

Da wir nicht an der trivialen Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  interessiert sind, darf die Inverse der Matrix  $-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$  nicht existieren. Dies ist der Fall, wenn ihre Determinante Null wird:

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0. \quad (3.1.6)$$

Um dies einzusehen, wird Gl. (3.1.5) mit  $(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}$  von links vormultipliziert:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u} e^{j\omega t} = (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{0}$$

oder

$$\mathbf{I} \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

was wieder nur die triviale Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  bedeutet. Die Inverse einer Matrix  $\mathbf{A}$  existiert nicht, wenn ihre Determinante  $|\mathbf{A}|$  Null wird, was unmittelbar aus Gl. (B.3.2) folgt. Dies sei gezeigt an folgendem:

Beispiel 16 Gegeben sei die Matrix  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

deren Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  ist, s.a. Kap. B.3,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mit  $|\mathbf{A}| = ad - bc$ .

□

Übung 17 1) Vollziehen Sie Beispiel 16 im einzelnen nach.

2) Zeigen Sie, daß für  $|\mathbf{A}| = ad - bc = 0$ , d.h.  $ad = bc$ , die Matrix  $\mathbf{A}$  nur noch den Rang Eins hat.

□

3.1.1.2.2 Eigenfrequenzen Aus der Gl. (3.1.6) läßt sich  $\omega$  gewinnen. Dies sei gezeigt am Beispiel des Abschn. 3.1.1.1:

Beispiel 17 Die Beziehung  $\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$  ergibt mit den aktuellen Matrizen

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgewertet:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)) \omega^2 + k_1 k_2 = 0, \quad (3.1.7)$$

eine quadratische Gleichung in  $\omega^2$ .

Für  $m_1 = 9$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k_1 = 24$  und  $k_2 = 3$  erhält man

$$\omega^4 - 6\omega^2 + 8 = 0$$

oder

$$(\omega^2 - 2)(\omega^2 - 4) = 0$$

und daraus  $\omega_1 = \pm\sqrt{2}$  und  $\omega_2 = \pm 2$ .

□

Die Gl. (3.1.7) wird als charakteristische Gleichung bezeichnet, die Frequenz  $\omega$  ist die natürliche Frequenz des Systems (3.1.2). Im nächsten Abschnitt wird gezeigt daß zwischen dieser und der Eigenfrequenz  $\lambda$  einer transformierten Steifigkeitsmatrix folgender Zusammenhang besteht:

$$\lambda = \omega^2. \quad (3.1.8)$$

3.1.1.2.3 Eigenformen Die natürlichen Frequenzen  $\omega_i$  werden nun in Gl. (3.1.5) eingesetzt, und so die zu den  $\omega_i$  gehörenden Eigenformen  $\mathbf{u}_i$  erhalten:

$$(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

In Übung 17 wurde gezeigt, daß die Matrix  $(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})$  einen Rang-Abfall von Zwei auf Eins hat, das heißt, daß die beiden Zeilen der Matrix linear abhängig sind. Das bedeutet, daß von den beiden Komponenten des Vektors  $\mathbf{u}_i$  nur das Verhältnis bestimmt werden kann, nicht ihre absolute Größe. Wir zeigen das mit den Werten des Beispiels 17 am

Beispiel 18 *Die Lösung der (homogenen) Matrixgleichung*

$$(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

ergibt für  $i = 1$ , d.h.  $\omega_1^2 = 2$ ,

$$\begin{pmatrix} -9 \times 2 + 24 + 3 & -3 \\ -3 & -1 \times 2 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder ausmultipliziert die beiden Gleichungen

$$9u_{1_1} - 3u_{1_2} = 0,$$

$$-3u_{1_1} + u_{1_2} = 0.$$

Aus beiden Gleichungen erhält man die gleiche Information:

$$\frac{u_{1_1}}{u_{1_2}} = \frac{1}{3},$$

d.h. wir kennen nur die Richtung des Vektors  $\mathbf{u}_1$ , nicht seine Größe. Für  $\omega_2^2 = 4$  ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -9 \times 4 + 24 + 3 & -3 \\ -3 & -1 \times 4 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder

$$\frac{u_{21}}{u_{22}} = -\frac{1}{3}.$$

So können die beiden Vektoren  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$  folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \dots$$

und

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \dots$$

□

3.1.1.2.4 Allgemeine Lösung Mit den in den beiden vorangegangenen Abschnitten gewonnenen Parametern  $\omega_i$  und  $\mathbf{u}_i$  kann die allgemeine Lösung des dynamischen Systems (3.1.2) als Kombination der vier Einzellösungen  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_i e^{\pm j\omega_i t}$ ,  $i = 1, 2$  geschrieben werden:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{a}e^{j\omega_1 t} + \mathbf{b}e^{-j\omega_1 t})\mathbf{u}_1 + (\mathbf{c}e^{j\omega_2 t} + \mathbf{d}e^{-j\omega_2 t})\mathbf{u}_2 \quad (3.1.9)$$

oder, unter Zuhilfenahme der Euler-Identität:

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\mathbf{u}_1 + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)\mathbf{u}_2. \quad (3.1.10)$$

Die Integrationskonstanten  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$  und  $\{A_1, \phi_1, A_2, \phi_2\}$  werden jeweils durch Einsetzen der vier Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0$  und  $\dot{\mathbf{x}}_0$  in die Gl. (3.1.9) bzw. Gl. (3.1.10) gewonnen.

Dies soll gezeigt werden anhand des folgenden

Beispiel 19 Gegeben seien  $\mathbf{x}_0 = (1, 0)'$  und  $\dot{\mathbf{x}}_0 = (0, 0)'$  und  $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{3}, 1)'$  und  $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{3}, 1)'$ , und damit wird die Lösung

$$x_1(t) = \frac{1}{3}A_1 \sin(\sqrt{2}t + \phi_1) - \frac{1}{3}A_2 \sin(2t + \phi_2), \quad (3.1.11a)$$

$$x_2(t) = A_1 \sin(\sqrt{2}t + \phi_1) + A_2 \sin(2t + \phi_2). \quad (3.1.11b)$$

Für  $t = 0$  lautet diese:

$$1 = \frac{1}{3}A_1 \sin \phi_1 - \frac{1}{3}A_2 \sin \phi_2, \quad (3.1.12a)$$

$$0 = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2. \quad (3.1.12b)$$

Nun wird Gl. (3.1.11a) differenziert:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}A_1 \cos(\sqrt{2}t + \phi_1) - \frac{2}{3}A_2 \cos(2t + \phi_2), \quad (3.1.13a)$$

$$\dot{x}_2(t) = \sqrt{2}A_1 \cos(\sqrt{2}t + \phi_1) + 2A_2 \cos(2t + \phi_2) \quad (3.1.13b)$$

und wiederum für  $t = 0$ :

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{3}A_1 \cos \phi_1 - \frac{2}{3}A_2 \cos \phi_2, \quad (3.1.14a)$$

$$0 = \sqrt{2}A_1 \cos \phi_1 + 2A_2 \cos \phi_2. \quad (3.1.14b)$$

Gl. (3.1.12a) und Gl. (3.1.14a) bilden ein Gleichungssystem mit den vier unbekanntenen Integrationskonstanten  $A_1, A_2, \phi_1$  und  $\phi_2$ . Gelöst wird es mit einem Paket für symbolische Algebra, z.B. *Maple*. Hier folgt der Ausdruck der Maple-Sitzung:

```
> eqn1:=1=1/3*A1*sin(phi.1)-1/3*A2*sin(phi.2);
```

$$eqn1 := 1 = \frac{1}{3} A1 \sin(\phi1) - \frac{1}{3} A2 \sin(\phi2)$$

```
> eqn2:=0=A1*sin(phi.1)+A2*sin(phi.2);
```

$$eqn2 := 0 = A1 \sin(\phi1) + A2 \sin(\phi2)$$

```
> eqn3:=0=sqrt(2)/3*A1*cos(phi.1)-2/3*A2*cos(phi.2);
```

$$eqn3 := 0 = \frac{1}{3} \sqrt{2} A1 \cos(\phi1) - \frac{2}{3} A2 \cos(\phi2)$$

```
> eqn4:=0=sqrt(2)*A1*cos(phi.1)+2*A2*cos(phi.2);
```

$$eqn4 := 0 = \sqrt{2} A1 \cos(\phi1) + 2 A2 \cos(\phi2)$$

```
> solve({eqn1, eqn2, eqn3, eqn4}, {A1, A2, phi.1, phi.2});
```

$$\{\phi2 = \frac{1}{2} \pi, \phi1 = -\frac{1}{2} \pi, A2 = \frac{-3}{2}, A1 = \frac{-3}{2}\},$$

$$\{\phi1 = -\frac{1}{2} \pi, \phi2 = -\frac{1}{2} \pi, A2 = \frac{3}{2}, A1 = \frac{-3}{2}\},$$

$$\{\phi2 = \frac{1}{2} \pi, A2 = \frac{-3}{2}, \phi1 = \frac{1}{2} \pi, A1 = \frac{3}{2}\},$$

$$\{\phi2 = -\frac{1}{2} \pi, A2 = \frac{3}{2}, \phi1 = \frac{1}{2} \pi, A1 = \frac{3}{2}\}$$

Von den vier Lösungsmengen wählen wir die dritte mit jeweils positiven Phasenwinkeln und erhalten damit als analytische Lösung der Differentialgleichung

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \sin(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \sin(2t + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{2} \cos 2t \quad (3.1.15a)$$

$$x_2(t) = \frac{3}{2} \sin(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}) - \frac{3}{2} \sin(2t + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} \cos \sqrt{2}t - \frac{3}{2} \cos 2t \quad (3.1.15b)$$

□

Hier folgt der Lösungsgraph in Abb. 3.3:

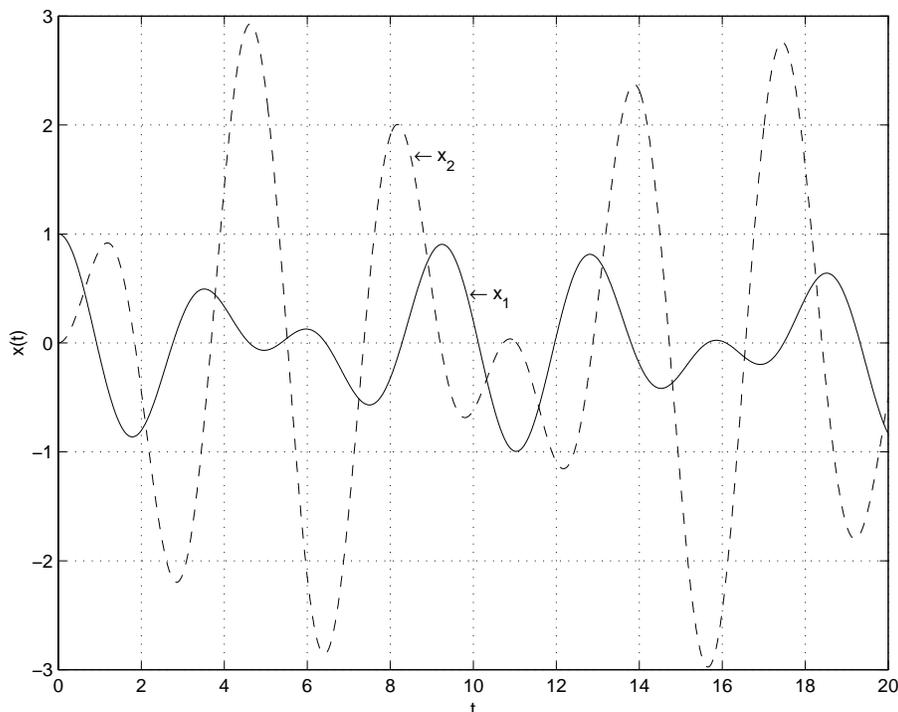


Abbildung 3.3: Zwei-Freiheitsgrad-System

### 3.1.1.3 Modal-Analyse

3.1.1.3.1 Eigenwerte und Eigenvektoren Aus der Linearen Algebra [21, 43] wissen Sie, daß die Matrix  $-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$  oder — bekannter mit  $\lambda = \omega^2$  als  $-\lambda \mathbf{M} + \mathbf{K}$  dem allgemeinen Eigenwertproblem zugrunde liegt. Bevor wir uns dessen Lösung zuwenden, sei zunächst das spezielle Eigenwertproblem

$$(-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.1.16)$$

behandelt. Die Genese von Gl. (3.1.16) ist leicht nachzuvollziehen. Wie im Falle der Systeme mit einem Freiheitsgrad, s.a. Gl. (2.2.9), wird die Systemgleichung

durch die Masse „dividiert“, wobei Division im Mehr-Freiheitsgrad-Fall immer Multiplikation mit der inversen Matrix bedeutet.

Zu diesem Zweck werden die Koordinaten  $\mathbf{x}$  des dynamischen Systems transformiert:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}, \quad (3.1.17)$$

in die Systemgleichung (3.1.2) eingesetzt und diese mit  $\mathbf{M}^{-1/2}$  vormultipliziert:

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.1.18)$$

Mit der Abkürzung  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{A}$  wird Gl. (3.1.18)

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{A} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.1.19)$$

Für diese wird wieder der harmonische Lösungsansatz

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} e^{j\omega t} \quad (3.1.20)$$

gewählt, der in Gl. (3.1.19) eingesetzt zu

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{v} e^{j\omega t} = \mathbf{0}$$

oder

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \omega^2 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (3.1.21)$$

führt, was zu zeigen war.

Wenn die Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$ , wie in unserem Fall, symmetrisch sind, dann ist auch die Matrix  $\mathbf{A}$  symmetrisch, und man spricht vom symmetrischen Eigenwertproblem. Es zeigt folgende Eigenschaften:

1. Alle Eigenwerte  $\lambda_i$  sind reell,
2. Alle Eigenvektoren sind zueinander orthogonal:

$$\mathbf{v}_i' \mathbf{v}_j = 0, \quad i \neq j, \quad (3.1.22)$$

3. Die Eigenvektoren werden auf Eins normiert:

$$\mathbf{v}_i \leftarrow \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}, \quad (3.1.23)$$

und bilden dann die Eigenvektor-Matrix  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (3.1.24)$$

Diese Matrix heißt Modal-Matrix und ist orthonormal.

Wir exemplifizieren das Beschriebene durch Fortführen des Beispiels 17 im

Beispiel 20 *Es gilt mit*

$$\mathbf{M}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \quad \text{und mit} \quad \mathbf{M}^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix}$$

für die transformierte Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

und damit ergibt sich für das Eigenwert-Problem:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Nun werden aus der Bedingung der Singularität der Matrix in der voranstehenden Gleichung ihre Eigenwerte bestimmt:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \{2, 4\}.$$

Dieses Ergebnis stimmt natürlich mit dem aus Beispiel 17 überein.

Als nächstes werden die zu den  $\lambda_i$  gehörenden Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  ermittelt:

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_1 & -1 \\ -1 & 3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \implies v_{11} - v_{12} = 0 \implies v_{11} = v_{12}.$$

Dieser wird zu Eins normiert:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2} = \sqrt{2}v_{11},$$

und aus der Forderung  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$  wird  $v_{11} = 1/\sqrt{2}$  erhalten und damit

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Und nun

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_2 & -1 \\ -1 & 3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies -v_{21} - v_{22} = 0 \implies v_{21} = -v_{22}.$$

Und aus  $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}v_{21} = 1$  folgt  $v_{21} = 1/\sqrt{2}$  und damit wird

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus beiden Resultaten zeigen Sie leicht:  $\mathbf{v}_1' \mathbf{v}_2 = 0$ , die Orthogonalität, und da beide Eigenvektoren zu Eins normiert sind, ist die Eigenvektor-Matrix  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  orthonormal.

□

Analog zur Transformation (3.1.17)  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}$  gilt auch die Transformation

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}_i \quad \text{oder} \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_i. \quad (3.1.25)$$

Damit wird gezeigt, daß

$$\mathbf{v}_i' \mathbf{v}_j = (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_i)' \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i' (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}})' \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i' \mathbf{M} \mathbf{u}_j = 1 \quad (3.1.26)$$

orthonormal ist.

Übung 18 Zeigen Sie die eben hergeleitete Aussage mit den Ergebnissen des Beispiels 20.

□

3.1.1.3.2 Transformation auf Diagonalform Zunächst sei nochmals die Modal-Matrix  $\mathbf{V}$  betrachtet. Als orthonormale Matrix besitzt sie folgende Eigenschaft [21]:

$$\mathbf{V}' \mathbf{V} = \mathbf{I}. \quad (3.1.27)$$

Übung 19 Zeigen Sie die Eigenschaft (3.1.27) anhand der Eigenvektoren aus Beispiel 20.

□

Übung 20 Zeigen Sie, daß aus der Eigenschaft (3.1.27) folgende einfache Aussage über die Inversion einer orthonormalen Matrix getroffen werden kann:

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}'. \quad (3.1.28)$$

□

Eine Transformation einer Matrix  $\mathbf{X}$  mit einer nicht-singulären Matrix  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{T} \quad (3.1.29)$$

wird als Ähnlichkeitstransformation bezeichnet. Die Matrix  $\mathbf{Y}$  wird als zur Matrix  $\mathbf{X}$  ähnlich bezeichnet.

Folgende Eigenschaft bildet die Grundlage der Modalanalyse: Eine symmetrische Matrix  $\mathbf{A}$  ist durch die Ähnlichkeitstransformation mit der Modal-Matrix  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V}' \mathbf{A} \mathbf{V} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (3.1.30)$$

diagonalisierbar. Die Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  wird als Spektralmatrix benannt.

Übung 21 Zeigen Sie mit den Parametern des Beispiels 20 die Gültigkeit der Aussage (3.1.30). Vergessen Sie nicht, daß diese Übung kein Beweis von (3.1.30) ist!

□

3.1.1.3.3 Entkopplung der Systemgleichungen Mit den Ergebnissen des vorangegangenen Paragraphen können wir den letzten Schritt der Modallanalyse, die Entkopplung der Systemgleichungen vornehmen. Dazu wird eine weitere Koordinatentransformation durchgeführt, mit deren Hilfe die Matrix  $\mathbf{A}$  diagonalisiert wird, ohne daß die zur Einheitsmatrix transformierte Massenmatrix wieder ent-diagonalisiert wird:

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}. \quad (3.1.31)$$

Die Variable  $\mathbf{p}$  nach Gl. (3.1.31) wird in die Gl. (3.1.19) substituiert

$$\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$$

und diese Gleichung mit der Inversen, d.h. der Transponierten, von  $\mathbf{V}$  von links (vor-)multipliziert:

$$\mathbf{V}'\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{V}'\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{p}(t) = \mathbf{0} \quad (3.1.32a)$$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(t) = \mathbf{0} \quad (3.1.32b)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.1.32c)$$

Damit ist die Entkopplung der Systemgleichungen vollendet, und jede dieser kann für sich nach den Methoden des Kap. 2 gelöst werden. Die Behandlung der Anfangsbedingungen wird in der Zusammenfassung des Algorithmus im nächsten Paragraphen erläutert.

Beispiel 21 In Komponenten lautet Gl. (3.1.32c) für den Zwei-Freiheitsgrad-Fall

$$\begin{pmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\ddot{p}_1 + \lambda_1 p_1 = 0,$$

$$\ddot{p}_2 + \lambda_2 p_2 = 0.$$

Die Rücktransformation in die Original-Koordinaten wird ebenfalls im nächsten Paragraphen dargestellt.

□

Die (theoretische) Modalanalyse wird zusammengefaßt in folgendem

Algorithmus 1 Gegeben sei das dynamische System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0.$$

Es wird in folgenden Schritten die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  gewonnen.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Zwei-Freiheitsgrad-Systeme lassen sich bequem mit Papier und Bleistift bearbeiten; bei mehr als zwei Freiheitsgraden zieht man den Computer zu Rate, z.B. `Matlab`[33].

1. Berechnung von  $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$  und  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ ,<sup>2</sup>
2. Berechnung von  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ ,
3. Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_i = \omega_i^2$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$ ,
4. Ordnen der Eigenvektoren in die Modal-Matrix  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ,
5. Berechnung von  $\mathbf{P} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}$  und  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}'\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$ ,
6. Transformation der Anfangswerte

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_0,$$

7. Lösung der Gleichung

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}:$$

$$p_i(t) = \sqrt{p_{i0}^2 + \frac{\dot{p}_{i0}^2}{\omega_i^2}} \sin\left(\omega_i t + \arctan \frac{\omega_i p_{i0}}{\dot{p}_{i0}}\right)$$

8. Rücktransformation der Lösung:  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{p}(t)$ .

□

Der Algorithmus sei mittels einer **Matlab**-Sitzung gezeigt im

Beispiel 22 In Übung 16 haben Sie gezeigt, daß für das dort gegebene Beispiel-System die Massenmatrix und die Steifigkeitsmatrix folgende Form haben:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Für die Diagonalmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathbf{M}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_{22}} \end{pmatrix}$$

Für die symmetrische Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

wird die Angelegenheit etwas komplizierter; auch hier hilft wieder **Maple**:

```
> interface(labeling=false);
> M:=matrix([[a,b],[b,d]]);
```

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

```
> S:='linalg/matpower'(M,1/2);
```

*S := result*

```
> print(S);
```

Wählen Sie nun folgende Parameter:  $m_1 = 1 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 1 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 2 \text{ N/m}$ ,  $k_3 = 1 \text{ N/m}$ ,  $x_2(0) = 1 \text{ m}$  und alle anderen Anfangswerte zu Null.

Es folgt die Ausgabe der `Matlab`-Sitzung:

```
M =
    1    0
    0    1
K =
    3   -2
   -2    3
M1 =
    1    0
    0    1
M2 =
```

---

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{4} \left( \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2} \right. \right. \\ & \quad - a \sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad + a \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad + d \sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad - d \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad + \sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2} \Big/ \\ & \quad \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}, \frac{1}{2} b \left( -\sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \right. \\ & \quad \left. \left. + \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \right) \Big/ \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2} \right] \\ & \left[ \frac{1}{2} b \left( -\sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \right. \right. \\ & \quad + \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \Big/ \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}, -\frac{1}{4} \left( \right. \\ & \quad - \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2} \\ & \quad + d \sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad - d \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad - a \sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad + a \sqrt{2a+2d+2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{2a+2d-2\sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2}} \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2} \right) \Big/ \right. \\ & \quad \left. \sqrt{a^2-2ad+d^2+4b^2} \right] \end{aligned}$$


---

```

      1   0
      0   1
A =
      3  -2
     -2   3
V =
    -0.7071  -0.7071
     0.7071  -0.7071
D =
      5   0
      0   1
P =
    -0.7071  -0.7071
     0.7071  -0.7071
PI =
    -0.7071   0.7071
    -0.7071  -0.7071
x0 =
      0
      1
xp0 =
      0
      0
p0 =
     0.7071
    -0.7071
pp0 =
      0
      0
w1 =
     2.2361
w2 =
      1

```

*und hier der Eingabe-File für die Sitzung:*

```

M=[1,0;0,1]
K=[3,-2;-2,3]
M1=sqrt(M)
M2=inv(M1)
A=M2*K*M2
[V,D]=eig(A)
P=M2*V
PI=V'*M1
x0=[0;1]
xp0=[0;0]
r0=PI*x0
rp0=PI*xp0
t=linspace(0,20,2000);
w1=sqrt(D(1,1))
w2=sqrt(D(2,2))
r1=r0(1)*cos(w1.*t)+rp0(1)/w1*sin(w1.*t);
r2=r0(2)*cos(w2.*t)+rp0(2)/w2*sin(w2.*t);

```

```

r1=sqrt(r0(1)^2+rp0(1)^2/w1^2)*sin(w1.*t+atan2(r0(1)*w1, rp0(1)));
r2=sqrt(r0(2)^2+rp0(2)^2/w2^2)*sin(w2.*t+atan2(r0(2)*w2, rp0(2)));
x1=P(1,1)*r1+P(1,2)*r2;
x2=P(2,1)*r1+P(2,2)*r2;
plot(t,x1,'-',t,x2,'--')
grid
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
gtext('\leftarrow x_1')
gtext('\leftarrow x_2')

```

□

Der Lösungsgraph ist in Abb. 3.4 dargestellt.

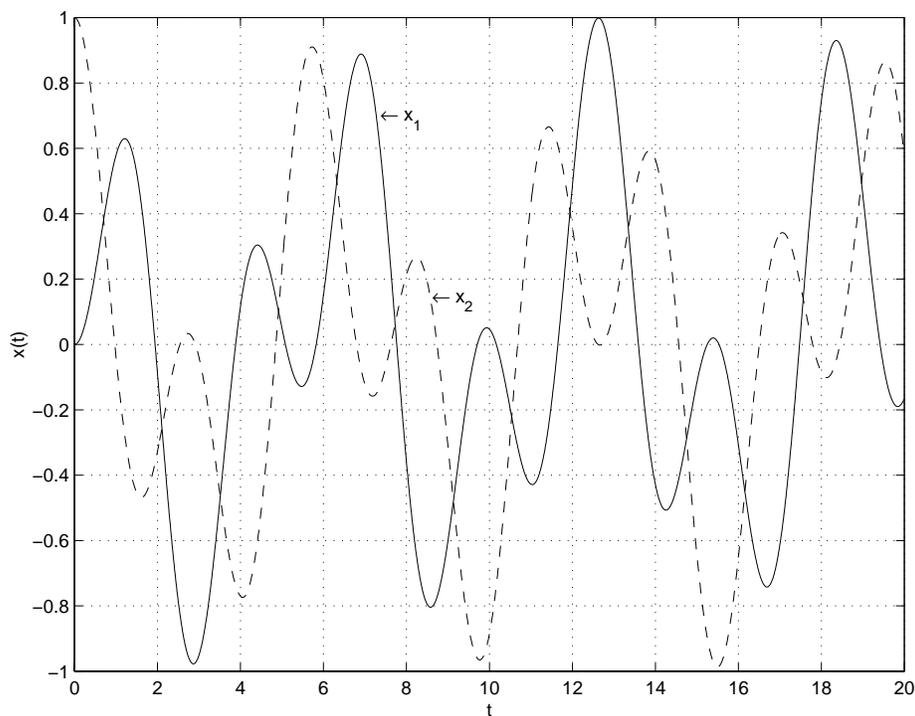


Abbildung 3.4: Modalanalyse

Übung 22 *Wiederholen Sie das Beispiel mit Bleistift und Papier!*

*Skizzieren Sie auch  $\mathbf{p}$ .*

*Worin besteht der Unterschied zu den Graphen in Abb. 3.4?*

□

### 3.1.1.4 Beispiele

3.1.1.4.1 Werkzeugmaschine Eine Werkzeugmaschine mit der Masse  $m = 1000 \text{ kg}$  und dem Massenträgheitsmoment  $J_0 = 300 \text{ kgm}^2$  sei elastisch gelagert mit  $k_1 = 3 \cdot 10^6 \text{ N/m}$  und  $k_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ . Die Lager seien  $l_1 = 0.5 \text{ m}$  und  $l_2 = 0.8 \text{ m}$  vom Schwerpunkt entfernt. Berechnen Sie die natürlichen Frequenzen und Eigenformen der Maschine.

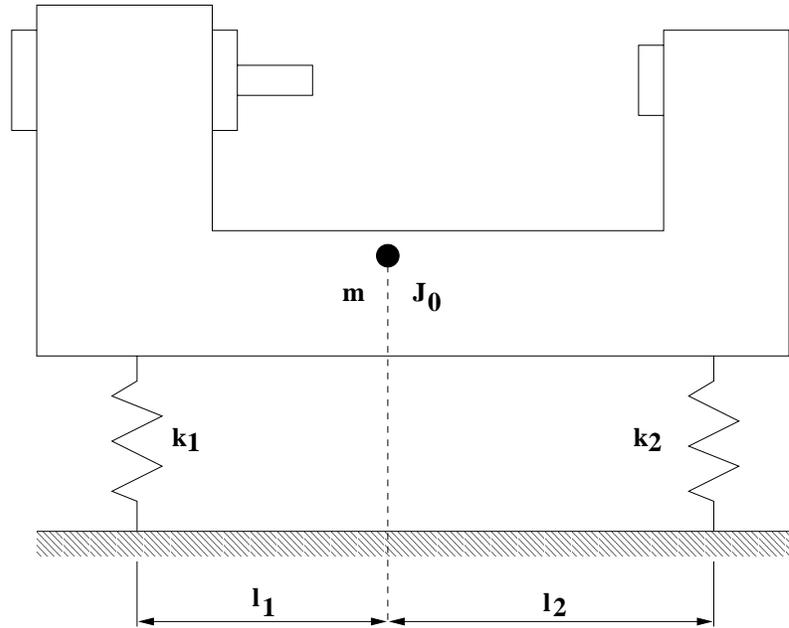


Abbildung 3.5: Prinzipskizze der Werkzeugmaschine

Die Modellbildung kann unter unterschiedlichen Koordinatensystemen erfolgen. Zunächst sei ein Koordinatensystem entsprechend Abb. 3.6 gewählt. Die beiden Koordinaten sind  $x(t)$  (translatorische Bewegung des Schwerpunktes) und  $\theta(t)$  (rotatorische Bewegung um den Schwerpunkt). Der freigeschnittene Körper in Abb. 3.6 zeigt für kleine Auslenkungen folgendes Kräftegleichgewicht:

$$m\ddot{x} = -f_1 - f_2 = -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta)$$

und folgendes Momentengleichgewicht:

$$J_0\ddot{\theta} = f_1 l_1 - f_2 l_2 = k_1 l_1(x - l_1\theta) - k_2 l_2(x + l_2\theta).$$

In Matrix-Schreibweise lauten beide Gleichungen zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 l_1 + k_2 l_2 \\ -k_1 l_1 + k_2 l_2 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist wieder in der folgenden `Matlab`-Sitzung gegeben, wobei die Werte aus `Matlab` heraus mit dem Befehl `diary` gespeichert werden:

```
1 m =
```

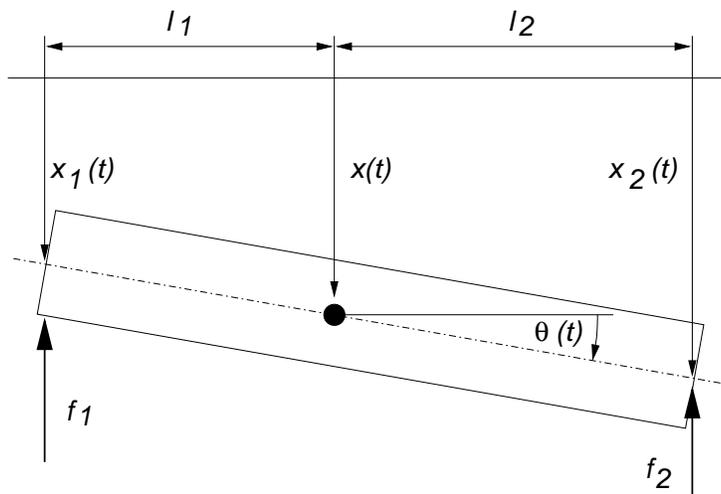


Abbildung 3.6: Koordinatensystem der Werkzeugmaschine

```

2      1000
3  J =
4      300
5  k1 =
6      3000000
7  k2 =
8      2000000
9  l1 =
10     0.5000000000000000
11  l2 =
12     0.8000000000000000
13  M =
14     1000      0
15     0      300
16  K =
17     1.0e+06 *
18     5.000000000000000  0.1000000000000000
19     0.100000000000000  2.0300000000000000
20  M1 =
21     31.62277660168379      0
22     0      17.32050807568877
23  M2 =
24     0.03162277660168      0
25     0      0.05773502691896
26  A =
27     1.0e+03 *
28     5.000000000000000  0.18257418583506
29     0.18257418583506  6.766666666666666
30  V =
31     0.99481178318674  0.10173257115012
32     -0.10173257115012  0.99481178318674

```

```

33 D =
34     1.0e+03 *
35     4.98132939148435          0
36           0  6.78533727518232
37 U =
38     0.98301325847268  0.05592416811137
39    -0.18353455714641  0.99843501912796
40 E =
41     1.0e+03 *
42     4.98132939148435          0
43           0  6.78533727518232
44 Modeshape_1 =
45    -5.35601182554696
46 Modeshape_2 =
47     0.05601182554696
48 U =
49     0.03145871078044  0.00321706637060
50    -0.00587353273389  0.05743548508159
51 U_norm =
52     0.54488085412332  0.05572122405192
53    -0.10173257115012  0.99481178318674

```

Mit dem korrespondierenden Eingabe-File:

```

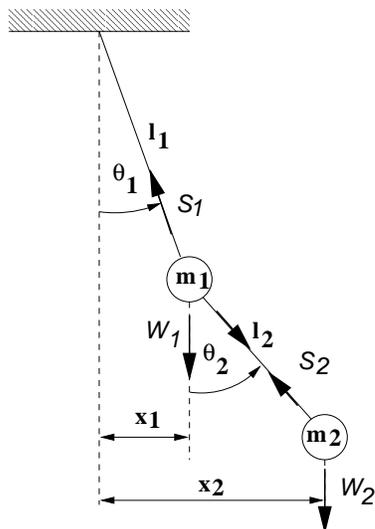
%Werkzeugmaschine
format long
m=1000
J=300
k1=3000000
k2=2000000
l1=1/2
l2=8/10
M=[m,0;0,J]
K=[k1+k2,-k1*l1+k2*l2;-k1*l1+k2*l2,k1*l1^2+k2*l2^2]
M1=sqrt(M)
M2=inv(M1)
A=M2*K*M2
[V,D]=eig(A)
[U,E]=eig(K,M)
Modeshape_1=U(1,1)/U(2,1)
Modeshape_2=U(1,2)/U(2,2)
U=M2*V
U_norm=U/norm(U)

```

Der Unterschied der Zeilen 38,39 und 52,53 ist kein Rechenfehler, sondern beruht auf der Definition der Matrix-Norm `norm(U)`.

Aufgabe 19 *Wiederholen Sie dieses Beispiel, wobei Sie nun die Koordinaten nicht in den Schwerpunkt der Maschine legen, sondern um den Abstand  $e$  horizontal nach links versetzt.*

## 3.1.1.4.2 Doppelpendel



Bestimmen Sie für das nebenstehenden Doppelpendel die Bewegungsgleichung in den Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  für kleine Ausschläge. Berechnen Sie die natürlichen Frequenzen, die Amplitudenverhältnisse und die Lage der Schwingungsknoten für  $m_1 = m_2 = m$  und  $l_1 = l_2 = l$ . Die Seilkräfte sind mit  $S_1$  und  $S_2$  bezeichnet.

Das Momentengleichgewicht um den Aufhängepunkt lautet:

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 &= -W_1 l_1 \sin \theta_1 \\ &\quad - S_2 \cos \theta_2 (l_1 \sin \theta_1) \\ &\quad + S_2 \sin \theta_2 (l_1 \cos \theta_1) \\ &= -W_1 l_1 \theta_1 + S_2 l_1 (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

und um die Masse  $m_1$ :

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 l_1 \ddot{\theta}_1 &= -W_2 l_2 \sin \theta_2 \\ &= -W_2 l_2 \theta_2. \end{aligned}$$

Mit den Beziehungen  $\theta_1 = x_1/l_1$  und  $\theta_2 = (x_2 - x_1)/l_2$  und der Approximation  $S_2 \approx W_2$  erhalten wir

$$\begin{pmatrix} m_1 l_1 & 0 \\ 0 & m_2 l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 + W_2 \frac{l_1 + l_2}{l_2} & -W_2 \frac{l_1}{l_2} \\ -W_2 & +W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.33)$$

Für  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$  und  $W_1 = W_2 = mg$  wird diese Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} ml & 0 \\ 0 & ml \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3mg & -mg \\ -mg & mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Problem wollen wir symbolisch, mit den Parametern  $m$  und  $l$  lösen. Damit wir Körper der irrationalen Zahlen bleiben, wählen wir  $g = 10$ . Hier die Maple-Sitzung:

```
> with(linalg):
> M:=matrix([[m*l,0],[0,m*l]]);
      M :=  $\begin{bmatrix} ml & 0 \\ 0 & ml \end{bmatrix}$ 
> g:=10;
      g := 10
> K:=matrix([[3*m*g,-m*g],[-m*g,m*g]]);
      K :=  $\begin{bmatrix} 30m & -10m \\ -10m & 10m \end{bmatrix}$ 
> M1:=matrix([[sqrt(m*l),0],[0,sqrt(m*l)]]);
      M1 :=  $\begin{bmatrix} \sqrt{ml} & 0 \\ 0 & \sqrt{ml} \end{bmatrix}$ 
> M2:=inverse(M1);
      M2 :=  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{ml}}{ml} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{ml}}{ml} \end{bmatrix}$ 
> A:=evalm(M2*K*M2);
      A :=  $\begin{bmatrix} \frac{30}{l} & -\frac{10}{l} \\ -\frac{10}{l} & \frac{10}{l} \end{bmatrix}$ 
> V:=eigenvectors(A);
      V :=
       $\left[ \left[ 10 \frac{2+\sqrt{2}}{l}, 1, \{[-1-\sqrt{2}, 1]\} \right], \left[ 10 \frac{2-\sqrt{2}}{l}, 1, \{[\sqrt{2}-1, 1]\} \right] \right]$ 
> v1:=V[1];
      v1 :=  $\left[ 10 \frac{2+\sqrt{2}}{l}, 1, \{[-1-\sqrt{2}, 1]\} \right]$ 
> v2:=v1[3];
```

---

```

v2 := {[ -1 - sqrt(2), 1 ]}

> v3:=v2[1];

v3 := [ -1 - sqrt(2), 1 ]

> w1:=V[2];

w1 := [10 * (2 - sqrt(2)) / l, 1, {[ sqrt(2) - 1, 1 ]}]

> w2:=w1[3];

w2 := {[ sqrt(2) - 1, 1 ]}

> w3:=w2[1];

w3 := [ sqrt(2) - 1, 1 ]

> W:=matrix([v3,w3]);

W := [ [ -1 - sqrt(2)  1 ]
       [ sqrt(2) - 1  1 ] ]

> U:=evalm(M2&*W);

U := [ [ (sqrt(m*l) * (-1 - sqrt(2))) / m l  (sqrt(m*l)) / m l ]
       [ (sqrt(m*l) * (sqrt(2) - 1)) / m l  (sqrt(m*l)) / m l ] ]

> r1:=U[1,1]/U[1,2];

r1 := -1 - sqrt(2)

> r2:=U[2,1]/U[2,2];

r2 := sqrt(2) - 1

> rf1:=evalf(r1);

rf1 := -2.414213562

> rf2:=evalf(r2);

rf2 := .414213562

> node1:=0;

node1 := 0

> node2:=zero/1=(1-zero)/(-r1);

```

---

$$\text{node2} := \text{zero} = -\frac{1 - \text{zero}}{-1 - \sqrt{2}}$$

> solve(node2, zero);

$$\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

> evalf("");

.2928932188

▽ Ein ausführlicher Kommentar dieser Sitzung ist Inhalt eines Praktikums.

### 3.1.2 Gedämpfte Eigenbewegung

#### 3.1.2.1 Modell-Gleichungen

Die Bewegungsgleichung des gedämpften Systems<sup>3</sup> mit zwei Freiheitsgraden entsprechend Abb. 3.7 lautet:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.34)$$

und mit der Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

abgekürzt

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.1.35)$$

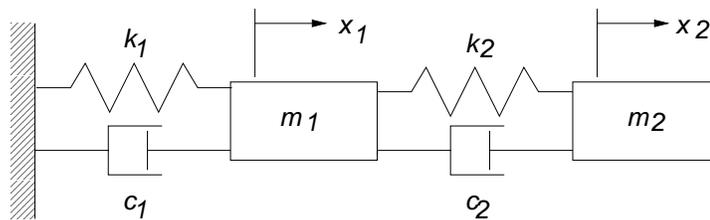


Abbildung 3.7: Zwei-Freiheitsgrad-System mit Dämpfung

Die Modalanalyse des Abschnitts 3.1.1.3 kann unmittelbar zur Lösung der Gl. (3.1.35) verwendet werden, wenn proportionale Dämpfung

$$\mathbf{C} = \mu\mathbf{M} + \kappa\mathbf{K} \quad (3.1.36)$$

<sup>3</sup>Wir betrachten vorläufig nur die geschwindigkeits-proportionale Coulomb-Dämpfung.

angenommen wird, womit die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mu\mathbf{M} + \kappa\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.1.37)$$

wird.

### 3.1.2.2 Modal-Analyse

Die beiden Koordinatentransformationen  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}$  und  $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$  führen dann mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}$$

und  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , den Eigenwerten  $\lambda_i$ , und  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ , den Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  von  $\mathbf{A}$  über

$$\ddot{\mathbf{q}} + (\mu\mathbf{I} + \kappa\mathbf{A})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.1.38)$$

zu

$$\ddot{\mathbf{p}} + (\mu\mathbf{I} + \kappa\mathbf{\Lambda})\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (3.1.39)$$

Komponentenweise geschrieben, sind dies entkoppelte Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{p}_i(t) + 2\zeta_i\omega_{n_i}\dot{p}_i(t) + \omega_{n_i}^2 p_i(t) = 0 \quad (3.1.40)$$

mit  $\omega_{n_i}^2 = \lambda_i$  und  $2\zeta_i\omega_{n_i} = \mu + \kappa\omega_{n_i}^2$  oder

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\omega_{n_i}} + \kappa\omega_{n_i} \right). \quad (3.1.41)$$

Gl. (3.1.40) ist ganz analog zu Gl. (2.2.9) gebaut, und demnach ist die Lösung für den unterdämpften Fall  $0 < \zeta_i < 1$

$$p_i(t) = A_i e^{-\zeta_i\omega_{n_i}t} \sin(\omega_{d_i}t + \phi_i) \quad (3.1.42)$$

mit

$$A_i = \sqrt{p_i^2(0) + \left( \frac{\dot{p}_i(0) + \zeta_i\omega_{n_i}p_i(0)}{\omega_{d_i}} \right)^2}$$

und

$$\phi_i = \arctan \frac{p_i(0)\omega_{d_i}}{\dot{p}_i(0) + \zeta_i\omega_{n_i}p_i(0)}$$

und mit

$$\omega_{d_i} = \sqrt{1 - \zeta_i^2}\omega_{n_i}.$$

Die zur Ermittlung von  $A$  und  $\phi$  notwendigen Anfangswerte  $p_i(0)$  und  $\dot{p}_i$  stehen mit  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{V}'\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{x}_0$  und  $\dot{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{V}'\mathbf{M}^{1/2}\dot{\mathbf{x}}_0$  zur Verfügung, und die Rücktransformation der Lösung (3.1.42) geschieht wieder durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{V}\mathbf{p}(t). \quad (3.1.43)$$

Die von  $\zeta_i$  abhängigen anderen Bewegungsformen werden analog zu Abschnitt 2.2.2 gewonnen.

## 3.2 Erzwungene Bewegung

Nachdem im ersten Abschnitt dieses Kapitels über Systeme mit zwei Freiheitsgraden die Eigenbewegung ohne und mit Dämpfung relativ ausführlich behandelt wurde, soll für die erzwungene Bewegung nur der Fall der Coulomb-Dämpfung beschrieben werden.

### 3.2.1 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (3.2.1)$$

Wieder sei proportionale Dämpfung vorausgesetzt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mu\mathbf{M} + \kappa\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (3.2.2)$$

Die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$  sind gegeben.

### 3.2.2 Modal-Analyse

Die Bewegungsgleichungen (3.2.2) sollen durch Diagonalisierung der System-Matrizen (Modal-Analyse) wieder auf zwei (bzw. i.a.  $n$ ) entkoppelte Differentialgleichungen zurückgeführt werden.

Dazu werden wie oben die Transformationen  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}$  und  $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$  und die Linksmultiplikationen  $\mathbf{M}^{-1/2}$  und  $\mathbf{V}'$  durchgeführt, wodurch Gl. (3.2.1) zunächst nach

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{q}(t) = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{f}(t)$$

und endlich nach

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{\Delta}\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(t) = \mathbf{V}'\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{f}(t) \quad (3.2.3)$$

überführt wird. Dabei ist  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1/2}$  und  $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(2\zeta_i\omega_{n_i})$ . Die resultierenden entkoppelten Gleichungen sind

$$\ddot{p}_i(t) + 2\zeta_i\omega_{n_i}\dot{p}_i + \omega_{n_i}^2 p_i(t) = \tilde{f}_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2.4)$$

wobei zu beachten ist, daß die rechten Seiten  $\tilde{f}_i$  die Elemente des Vektors  $\mathbf{V}'\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{f}$ , also Linearkombinationen der  $f_i$ , der auf jede Masse  $m_i$  aufgeprägten Kräfte oder auf die entsprechenden Massenträgheitsmomente  $J_i$  aufgeprägten Momente sind.

Die Lösung der Bewegungsgleichung (3.2.4) aus Abschnitt 2.4.3 sei hier wiederholt:

$$p_i(t) = \sqrt{p_i(0)^2 + \left(\frac{\dot{p}_i(0) + \zeta_i\omega_{n_i}p_i(0)}{\omega_{d_i}}\right)^2} e^{-\zeta_i\omega_{n_i}t} \sin(\omega_{d_i}t + \phi_i) + \frac{1}{m_{ii}\omega_{d_i}} e^{-\zeta_i\omega_{n_i}t} \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) e^{\zeta_i\omega_{n_i}\tau} \sin \omega_{d_i}(t - \tau) d\tau, \quad (3.2.5)$$

mit

$$\phi_i = \arctan \frac{p_i(0)\omega_{d_i}}{\dot{p}_i(0) + \zeta_i\omega_{n_i}p_i(0)}$$

und  $m_{ii}$  den Diagonalelementen der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und  $p_i(0)$  und  $\dot{p}_i(0)$  wie in Paragraph 3.1.2.2. Auch die Rücktransformation in die Original-Koordinaten  $\mathbf{x}$  geschieht wie dort.

### 3.2.3 Drei Integrale

Für die Lösung (3.2.5) sind drei Integrale von Bedeutung, nämlich:

#### 3.2.3.1 Harmonische Anregung des gedämpften Systems

Anregung:  $f(\tau) = \sin(\omega\tau)$

Integral:

$$\int_0^t \sin(\omega\tau) e^{\zeta_i\omega_{n_i}\tau} \sin \sqrt{1 - \zeta_i^2}\omega_{n_i}(t - \tau) d\tau, \quad (3.2.6)$$

#### 3.2.3.2 Sprungförmige Anregung des gedämpften Systems

Anregung: 1

Integral:

$$\int_0^t e^{\zeta_i\omega_{n_i}\tau} \sin \sqrt{1 - \zeta_i^2}\omega_{n_i}(t - \tau) d\tau, \quad (3.2.7)$$

#### 3.2.3.3 Harmonische Anregung des ungedämpften Systems

Anregung:  $f(\tau) = \sin(\omega\tau)$

Integral:

$$\int_0^t \sin(\omega\tau) \sin \omega_{n_i}(t - \tau) d\tau, \quad (3.2.8)$$

#### 3.2.3.4 Lösungen der Integrale

Die Lösungen der Integrale in der o.a. Reihenfolge präsentiert für Sie Maple:

```
> interface(labeling=false);
> int(sin(omega*tau)*exp(zeta[i]*omega[i]*tau)*
> sin(sqrt(1-zeta[i]^2)*omega[i]*(t-tau)),tau=0..t);
```

$$\begin{aligned}
& -e^{(t \zeta_i \omega_i)} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i (2 \zeta_i \omega_i \cos(t \omega) \omega + \sin(t \omega) \omega^2 - \sin(t \omega) \omega_i^2) \\
& \quad / ((\omega^2 + 2 \omega \sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i + \omega_i^2) (\omega^2 - 2 \omega \sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i + \omega_i^2)) + \omega \\
& \quad (2 \zeta_i \omega_i^2 \cos(\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i t) \sqrt{1 - \zeta_i^2} + 2 \sin(\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i t) \zeta_i^2 \omega_i^2 \\
& \quad + \sin(\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i t) \omega^2 - \sin(\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i t) \omega_i^2) / ( \\
& \quad (\omega^2 + 2 \omega \sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i + \omega_i^2) (\omega^2 - 2 \omega \sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i + \omega_i^2))
\end{aligned}$$

> `int(exp(zeta*omega[i]*tau)*sin(sqrt(1-zeta^2)`

> `*omega[i]*(t-tau)),tau=0..t);`

$$\frac{\sqrt{1 - \zeta^2} e^{(t \zeta \omega_i)}}{\omega_i} - \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_i t) + \zeta \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_i t)}{\omega_i}$$

> `int(sin(omega*tau)*sin(omega[i]*(t-tau)),tau=`

> `0..t);`

$$-\frac{\sin(t \omega) \omega_i}{(\omega + \omega_i) (\omega - \omega_i)} + \frac{\sin(\omega_i t) \omega}{(\omega + \omega_i) (\omega - \omega_i)}$$

## 3.2.4 Beispiele

### 3.2.4.1 KFZ-Aufhängung

In Abb. 3.8 ist eine einfache KFZ-Aufhängung und ihr mechanisches Ersatzmodell dargestellt. Es sollen zuerst die Bewegungsgleichungen und daran anschließend die natürlichen Frequenzen des Systems bestimmt werden. Die Fahrzeugmasse sei  $m_{\text{unnamed.fig1}} = 2000$  kg, die Federsteifigkeit  $k_1 = 10^3$  N/m, die Reifenmasse  $m_2 = 50$  kg und die Reifensteifigkeit  $k_2 = 10^4$  N/m.

Die Bewegungsgleichungen für ein Zwei-Freiheitsgrad-System ohne Dämpfung lauten  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  oder

$$\begin{pmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 11000 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Die natürlichen Frequenzen ergeben sich aus der Lösung der Polynomgleichung

$$\det(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} -2000\omega_n^2 + 1000 & -1000 \\ -1000 & -50\omega_n^2 + 11000 \end{vmatrix} \\ = 10^5 \omega_n^4 - 2.205 \times 10^7 \omega_n^2 + 10^7 = 0$$

und damit  $\omega_{n1,2}^2 = \lambda_{1,2} = \{0.4545, 220.0455\}$  oder  $\omega_{n1,2} = \{0.6741, 14.8339\}$ .

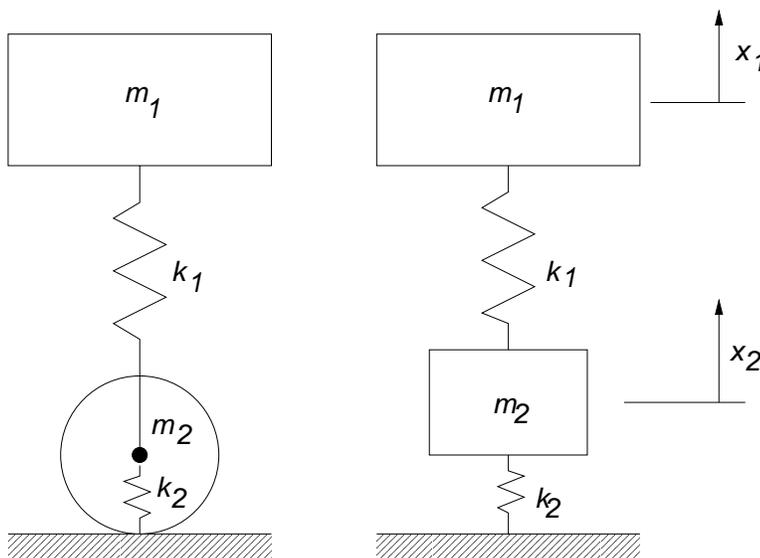


Abbildung 3.8: Prinzipskizze und Ersatzmodell einer KFZ-Aufhängung

Nun sei parallel zu den Federn je ein Dämpfungsglied mit den Dämpfungsverhältnissen  $\zeta_{1,2} = \{0.01, 0.2\}$  geschaltet. Außerdem sei das Rad von einer Kraft  $f_2(t) = 10 \sin 3t$  N angeregt. Es soll die Systemantwort  $x_1(t)$  der Fahrzeugmasse bestimmt werden. Die Anfangsbedingungen seien Null.

Zunächst wird die Koordinatentransformation  $\mathbf{q} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{x}$  durchgeführt und damit die Matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$  gewonnen. Dann werden die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  mit  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  nebst der Eigenvektormatrix  $\mathbf{V}$  bestimmt. Dies geht noch einfach „per Hand“. Ich kopiere aber direkt aus einer `Matlab`-Sitzung:<sup>4</sup>

```
>> M1=sqrt(M)
```

```
M1 =
```

<sup>4</sup>Das geht unter Linux ähnlich wie Cut-and-Paste unter Windows.

```

44.72135954999580      0
      0      7.07106781186548

>> M2=inv(M1)

M2 =

      0.02236067977500      0
      0      0.14142135623731

>> A=M2*K*M2
      1.0e+02 *

      0.005000000000000 -0.03162277660168
      -0.03162277660168  2.200000000000000

>> [V,D]=eig(A)

V =

      0.99989628223203 -0.01440224907975
      0.01440224907975  0.99989628223203

D =

      1.0e+02 *

      0.00454451365276      0
      0      2.20045548634724

```

Die Koordinatentransformation nach  $\mathbf{p} = \mathbf{V}'\mathbf{q}$  führt auf die (zweimal) transformierte Systemgleichung

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \text{diag}(2\zeta\omega_{n_i})\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(t) = \mathbf{V}'\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{f}(t),$$

deren rechte Seite

$$\mathbf{f}(t) = (0.02036785597726 \sin 3t, 1.41406688329898 \sin 3t)'$$

ist. Die entkoppelten Gleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + 0.0134826\dot{p}_1 + 0.4544514p_1 &= 0.0203679 \sin 3t \\ \ddot{p}_2 + 5.9335729\dot{p}_2 + 220.0455486p_2 &= 1.4140669 \sin 3t, \end{aligned}$$

und deren Lösungen sind:<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Gewonnen mit Maple aus der Form

$$\ddot{p}_1 + \alpha\dot{p}_1 + \beta p_1 = c \sin 3t$$

und damit für beide Gleichungen mit unterschiedlichen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $c$  verwendbar.

```

> interface(labeling=false):
> dsolve({diff(p(t),t,t)+a*diff(p(t),t)+b*p(t)
> =c*sin(3*t),p(0)=0,D(p)(0)=0},p(t)):
> simplify("");

```

$$\begin{aligned}
p(t) = & \frac{1}{2}(-6 e^{(-1/2(a-\sqrt{a^2-4b})t)} b + 2 \sin(3t) b \sqrt{a^2-4b} \\
& + 6 e^{(-1/2(a+\sqrt{a^2-4b})t)} b - 6 \cos(3t) a \sqrt{a^2-4b} \\
& + 54 e^{(-1/2(a-\sqrt{a^2-4b})t)} + 3 e^{(-1/2(a-\sqrt{a^2-4b})t)} \sqrt{a^2-4b} a \\
& - 3 e^{(-1/2(a+\sqrt{a^2-4b})t)} a^2 + 3 e^{(-1/2(a+\sqrt{a^2-4b})t)} \sqrt{a^2-4b} a \\
& + 3 e^{(-1/2(a-\sqrt{a^2-4b})t)} a^2 - 54 e^{(-1/2(a+\sqrt{a^2-4b})t)} \\
& - 18 \sin(3t) \sqrt{a^2-4b} c / (\sqrt{a^2-4b} (9a^2 + b^2 - 18b + 81))
\end{aligned}$$

Es darf nicht vergessen werden, die Koordinaten  $\mathbf{p}$  in die ursprünglichen physikalischen Koordinaten zurückzutransformieren:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{p}(t).$$

Da nur die erste Koordinate  $x_1(t)$  gesucht ist, ist dies ein einfaches Skalarprodukt, dessen Ausführung sei dem Leser überlassen.

#### 3.2.4.2 KFZ-Nickbewegung

Dieses Beispiel wird in einer Übung im WS 1997/98 behandelt.



## Kapitel 4

# Viel-Freiheitsgrad-Systeme

Systeme mit mehr als zwei Freiheitsgraden sind mit „Papier und Bleistift“ mühsam zu analysieren. Die Verallgemeinerung von zwei auf mehr als zwei Freiheitsgrade unter Verwendung des Matrix-Kalküls und eines Computers (**Matlab**) ist dagegen trivial.

Die entsprechende Ausarbeitung erfolgt erst in den nächsten Semesterferien. Diesmal ist die Materie kein Prüfungstoff!



# Kapitel 5

## Kontinuierliche Systeme

Die bisher behandelten dynamischen Systeme waren durch konzentrierte Parameter (Masse, Dämpfungsbeiwert, Steifigkeit) gekennzeichnet. Im mathematischen Kontext sind diese durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben.

Nun sollen Systeme beschrieben und behandelt werden, die nicht mehr durch diskret verteilte Massen sondern durch kontinuierlich verteilte Parameter charakterisiert sind. Dazu gehören Saiten, Stäbe, Balken, Platten, Schalen und andere mechanische Systeme. Diese werden nun als partielle Differentialgleichungen modelliert: Die Variablen sind nun von Ort und Zeit abhängig, z.B. bezeichnet  $w(x, t)$  die Durchbiegung eines Balkens am Ort  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Begonnen wird mit Systemen 2. Ordnung, danach folgen Systeme 4. Ordnung. Wir beschränken uns dabei auf lineare Systeme.

### 5.1 Systeme zweiter Ordnung

Systeme zweiter Ordnung sind schwingende Saiten und längs- und torsionsschwingende Stäbe. Zunächst seien schwingende Saiten (Streichinstrumente, Brückenkabel, Überlandleitungen) behandelt.

#### 5.1.1 Die Schwingende Saite

##### 5.1.1.1 Mathematisches Modell

In Abbildung 5.1 ist eine beidseitig eingespannte Saite mit der Länge  $l$  gezeigt. Sie steht unter (Längs-)Spannung  $\tau$ , hat eine homogene Dichteverteilung  $\rho$  und wird quer zur Längenabmessung mit Last/Länge  $f(x, t)$  belegt. Die seitliche Auslenkung der Saite ist  $w(x, t)$ .

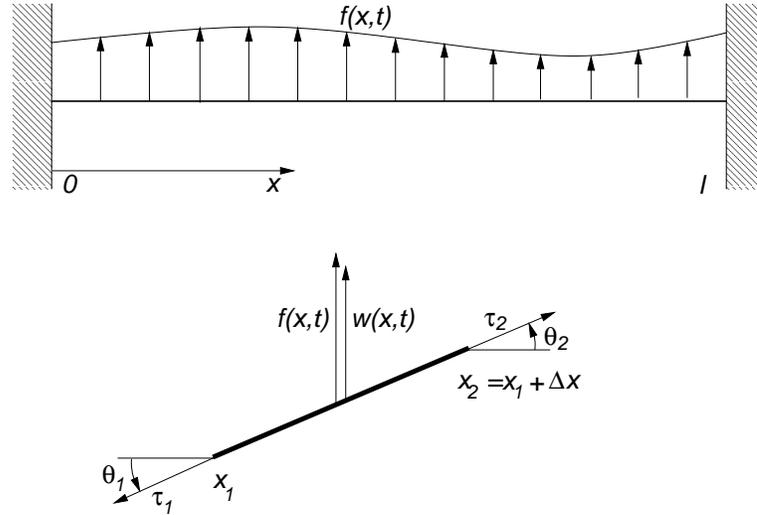


Abbildung 5.1: Schwingende Saite

Die Abbildung zeigt auch einen infinitesimalen Ausschnitt  $\Delta x$ , anhand dessen die Bewegungsgleichung modelliert wird. Das zweite Axiom von Newton ergibt quer zur Saite:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \Delta x - \tau_1 \sin \theta_1 + \tau_2 \sin \theta_2 \quad (5.1.1)$$

und längs zur Saite

$$0 = -\tau_1 \cos \theta_1 + \tau_2 \cos \theta_2. \quad (5.1.2)$$

Mit der Approximation für kleine Winkel  $\theta$  und der Steigung  $\partial w / \partial x$  der Saite

$$\sin \theta_i \cong \tan \theta_i = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x_i}$$

und  $\cos \theta_i \cong 1$  ergibt Gl. (5.1.2)  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  und Gl. (5.1.1)

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \Delta x - \tau \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x_1} + \tau \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x_2}. \quad (5.1.3)$$

Zwischen links- und rechtsseitiger Steigung besteht nach Taylor-Entwicklung folgender Zusammenhang:

$$\tau \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x_2} = \tau \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x_1} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x_1} \Delta x + O(\Delta x^2).$$

Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung  $O(\Delta x^2)$  wird Gl. (5.1.3) mit  $c = \sqrt{\tau / \rho}$ , der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und  $f(x, t) = 0$  die freie Schwingung der Saite

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.1.4)$$

Gleichung (5.1.4) ist die Gleichung der schwingenden Saite; sie wird in der mathematischen Physik als Wellengleichung bezeichnet. Es ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in Raum und Zeit. Zu ihrer Lösung werden zwei (räumliche) Randbedingungen und zwei (zeitliche) Anfangsbedingungen benötigt: Man spricht von einem Anfangs-Randwert-Problem. Bei der eingespannten Saite liegen beide Ränder fest:

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.1.5)$$

Ganz analog zu den Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden sind Anfangswerte für den Ort und die Geschwindigkeit anzugeben:

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (5.1.6)$$

Die Saiten- oder Wellengleichung ist eine Gleichung vom hyperbolischen Typ. Bezüglich der Klassifizierung von partiellen Differentialgleichungen geben Anhang E und Logan[30] Auskunft.

#### 5.1.1.2 Lösung der Wellengleichung

Wir betrachten zunächst den homogenen Teil von Gl. (5.1.4):

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.1.7)$$

und separieren die Variable  $w(x, t)$  in einen ortsabhängigen Anteil  $X(x)$  und einen zeitabhängigen Anteil  $T(t)$ :<sup>1</sup>

$$w(x, t) = X(x)T(t). \quad (5.1.8)$$

Dies bedeutet, daß  $X(x)$  die Form der Saite bestimmt und  $T(t)$  ihre Bewegung. Damit wird Gl. (5.1.7)

$$c^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

oder nach Umformung

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite nur von  $x$  abhängig, die rechte nur von  $t$ , die Variablen sind separiert. In die rechte Seite kann jedes positive  $t$  eingesetzt werden, und die linke Seite muß die resultierende Zahl für jedes  $x \in [0, l]$  ergeben. D.h. diese Gleichung ist für zwei Variable  $x$  und  $t$  nur dann erfüllt, wenn sie konstant ist.

*Aufgabe 20 Geben Sie ein mathematisches Argument für die Richtigkeit dieser Behauptung.*

□

---

<sup>1</sup>Diese Technik der Separation der Variablen geht auf Fourier zurück.

Die Separationskonstante  $\lambda$  in dieser Gleichung

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda \quad (5.1.9)$$

hat konventionell negatives Vorzeichen. Gl. (5.1.9) legt zwei Teilprobleme vor:

1. Das Ortsproblem

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (5.1.10)$$

2. und das Zeitproblem

$$T'' + \lambda c^2 T = 0. \quad (5.1.11)$$

Wir lösen zunächst das Ortsproblem. Da  $w(0, t) = X(0)T(t) = 0$  und  $w(l, t) = X(l)T(t) = 0$  sind, schließen wir auf  $X(0) = X(l) = 0$ , da die alternative Annahme  $T(t) = 0$  zu  $w(x, t) = 0$  also zur unbewegten Saite führt. Damit wird Problem (5.1.10) zu einem Randwertproblem

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (5.1.12)$$

Hierin ist  $\lambda$  ganz analog zu diskreten Systemen Eigenwert des Problems und nichttriviale Lösungen  $X$  die zugehörigen Eigenfunktionen.

Wir untersuchen unterschiedliche Lösungstypen: a) Für  $\lambda = 0$  ist  $X'' = 0$ , was nach zweifacher Integration zu  $X(x) = ax + b$  mit Konstanten  $a$  und  $b$  führt; diese sind wegen  $X(0) = b = 0$  und  $X(l) = al = 0$  beide Null, weswegen Problem (5.1.12) keine nichttriviale Lösung besitzt. b) Nun sei  $\lambda < 0$ , z.B.  $\lambda = -k^2$ , was zu  $X'' - k^2 X = 0$  führt mit der Lösung  $X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$ . Die Randwerte ergeben zunächst  $X(0) = a + b = 0$  oder  $a = -b$  mit  $X(x) = 2a \sinh kx$  und dann speziell  $X(l) = 2a \sinh kl = 0$ , was nur für  $a = 0$  möglich ist: Auch dieser Fall führt nur auf triviale  $X(x) \equiv 0$ . Es bleibt c)  $\lambda > 0$ , z.B.  $\lambda = k^2$  und  $X'' + k^2 X = 0$  mit der Lösung

$$X(x) = a \cos kx + b \sin kx.$$

Der „linke“ Randwert fordert  $X(0) = a = 0$  und damit  $X(x) = b \sin kx$ . Der „rechte“ Randwert bedingt  $X(l) = b \sin kl = 0$ , was einerseits für  $b = 0$  wiederum nur die triviale Lösung  $X(x) \equiv 0$  ergibt, andererseits auch für  $\sin kl = 0$  erfüllt ist, was in

$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

oder

$$\lambda_n = k^2 = n^2 \pi^2 / l^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1.13)$$

resultiert mit entsprechenden Eigenfunktionen

$$X_n(x) = \sin \left( n\pi \frac{x}{l} \right). \quad (5.1.14)$$

Die erhaltenen Eigenwerte werden nun in die Zeitgleichung eingesetzt:

$$T'' + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} T = 0,$$

welche die allgemeine Lösung

$$T_n(t) = a_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{l}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

besitzt.

Orts- und Zeitlösung werden zur Gesamtlösung zusammengeführt:

$$w_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left[ a_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) \right] \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right). \quad (5.1.15)$$

Diese Lösung erfüllt die Wellengleichung für alle positiven  $n$  und die Randbedingungen  $w(0, t) = w(l, t) = 0$ . Die noch unbestimmten Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  in Gl. (5.1.15) werden durch Auswertung der Anfangsbedingungen  $w_0(x)$  und  $v_0(x)$  gewonnen. Hier wird nur das Ergebnis mitgeteilt, eine ausführliche Begründung findet der interessierte Leser in O'Neil[37].

Auch die unendliche Summe

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) \right] \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \quad (5.1.16)$$

erfüllt die Wellengleichung, und der Anfangswert

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = w_0(x)$$

wird durch die  $a_n$  als Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx \quad (5.1.17)$$

erfüllt. Ebenso wird mit der partiellen Ableitung der Lösung nach der Zeit

$$w_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\frac{c}{l} \left[ -a_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) + b_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) \right] \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)$$

der Anfangswert

$$w_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\frac{c}{l} b_n \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = v_0(x)$$

durch die  $b_n$  als Fourier-Koeffizienten

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx \quad (5.1.18)$$

erfüllt.

Gleichungen (5.1.16)– (5.1.18) sind die (Fourier-)Lösung der Wellengleichung.

Die Herleitung der D'Alembert-Lösung

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [w_0(x - ct) + w_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi$$

findet der Leser in O'Neil[37].

Beispiel 23 Gegeben sei die Wellengleichung

$$w_{tt} = 4w_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

Randbedingungen:

$$w(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

Anfangsbedingungen:

$$w(x, 0) = w_0(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1/4, \\ 1/4 & \text{falls } 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ 1-x & \text{falls } 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \dot{w}(x, 0) = v_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Mit  $v_0(x) = 0$  sind auch alle  $b_n = 0$  in Gl. (5.1.16). Die Koeffizienten  $a_n = 2 \int_0^1 w_0(x) \sin n\pi x dx$  berechnet die folgende **Maple**-Sitzung, die auch einen Graphen für  $x \in [0, 1]$  und  $t \in [0, 1]$  zeichnet.

```
> assume(n, integer);
> w[0] := piecewise(x < 1/4, x, x < 3/4, 1/4, x < 1, 1-x);
```

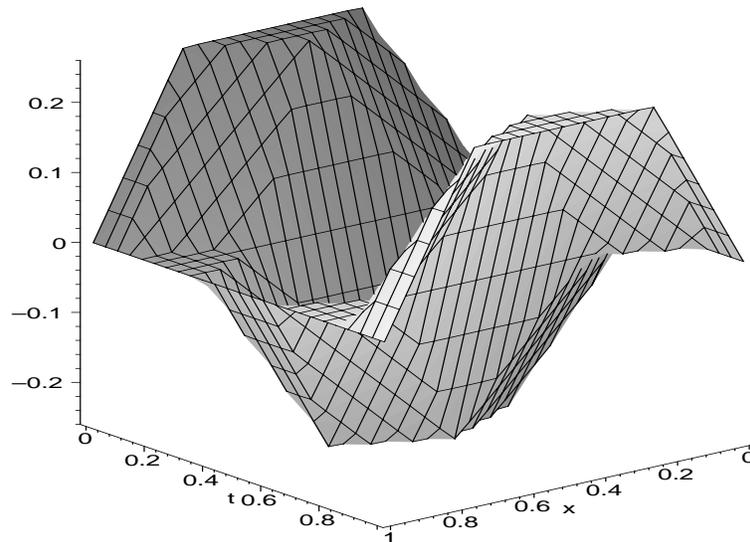
$$w_0 := \begin{cases} x & x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & x < \frac{3}{4} \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

```
> a[n] := 2*int(w[0]*sin(n*Pi*x), x=0..1);
```

$$a_n := 2 \frac{\sin(\frac{1}{4} n \pi) + \sin(\frac{3}{4} n \pi)}{n^2 \pi^2}$$

```
> w := sum(a[n]*sin(n*Pi*x)*cos(2*n*Pi*t), n=1..105);
```

```
> plot3d(w, x=0..1, t=0..1, axes=frame);
```



□

## 5.1.1.3 Charakteristische Gleichung

Die Behandlung der Randbedingungen soll nun systematisiert werden. Dazu wählen wir eine Konfiguration wie sie in Abb. 5.2 dargestellt ist: Die Saitenenden können sich in einem Schlitz reibungsfrei vertikal bewegen. In diesem Fall kann die Saite keine Kraft vertikal zur Längenausdehnung  $x$  aufnehmen, d.h.

$$\tau \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (5.1.19)$$

oder  $\partial y / \partial x = 0$ .

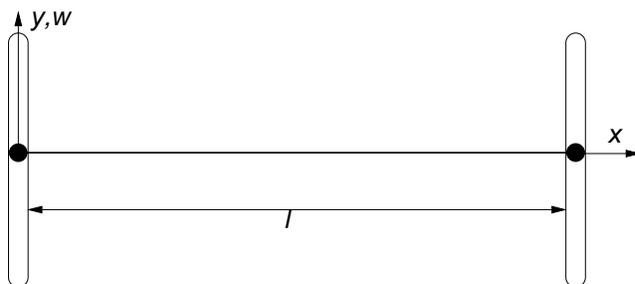


Abbildung 5.2: Schwingende Saite: Variation der Randbedingungen

Dann werden mit der Ableitung von

$$X(x) = a \cos kx + b \sin kx,$$

d.h. mit

$$X'(x) = -ka \sin kx + kb \cos kx$$

die beiden Randbedingungen in Vektordarstellung formuliert:

$$\begin{pmatrix} X'(0) \\ X'(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ka & kb \\ -ka \sin kl & kb \cos kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da aus der ersten Gleichung  $b = 0$  folgt, kann die Vektordarstellung umgeformt werden in eine Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k \sin kl & k \cos kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem mit den unbekanntenen Koeffizienten  $a$  und  $b$  hat nur dann eine nicht verschwindende Lösung, wenn die Determinante der Matrix Null wird, d.h.

$$k^2 \sin kl = 0. \quad (5.1.20)$$

Gleichung (5.1.20) ist die charakteristische Gleichung des Systems.

*Aufgabe 21 Geben Sie die Lösung der Wellengleichung mit den Randbedingungen dieses Abschnitts an.*

□

### 5.1.2 Längsschwingung von Stäben

Nach der schwingenden Saite betrachten wir als nächstes Kontinuum die Längsschwingungen von Stäben. Auch sie führen auf das Modell einer Differentialgleichung zweiter Ordnung im Ort und in der Zeit.

#### 5.1.2.1 Mathematisches Modell

Eine Prinzipskizze der Anordnung zeigt Abb. 5.3, die auch ein infinitesimales Stabelement mit der Längenausdehnung  $dx$  enthält,<sup>2</sup> auf das das zweite Axiom von Newton angewendet, folgende Gleichgewichtsbeziehung ergibt:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F + dF - F.$$

Hierin ist  $w(x, t)$  die Auslenkung des Stabes am Ort  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $\rho$  die Dichte des Stabmaterials,  $A(x)$  die (variable) Querschnittsfläche, und  $F$  bzw.  $F + dF$  sind die (Zug-)Kräfte, die in  $x$ -Richtung auf die beiden Querschnittsflächen wirken.

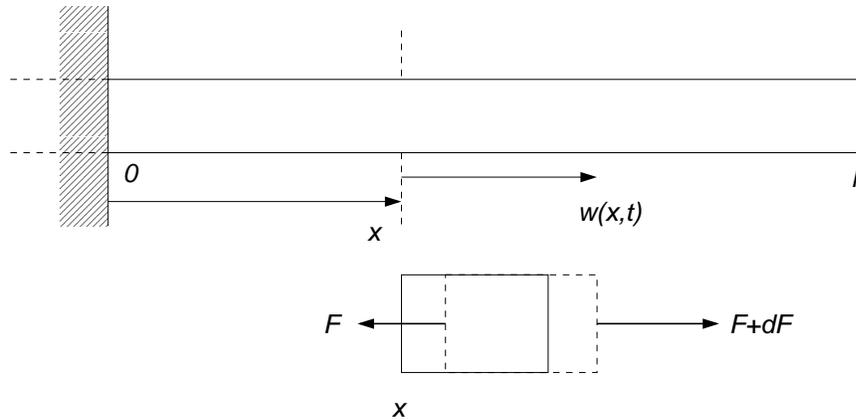


Abbildung 5.3: Schwingender Stab

Ein Ergebnis aus der Festigkeitslehre stellt folgenden Zusammenhang zwischen Kraft  $F$  und Zugspannung  $\sigma_s$  und zwischen Zugspannung und Dehnung  $w_x$  her:  $F = \sigma_s A(x)$  und  $\sigma_s = E w_x(x, t)$ , und damit

$$F = EA(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}.$$

In die Gleichgewichtsbeziehung eingesetzt und mit  $dF = (\partial F / \partial x) dx$  erhält man

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EA(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right).$$

<sup>2</sup>Das durchgezogene Element kennzeichnet den Gleichgewichtszustand, das gestrichelte den deformierten.

Für konstanten Querschnitt vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.1.21)$$

Diese Gleichung hat mit  $c = \sqrt{E/\rho}$ , der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Auslenkung  $w$  ganz analoge Struktur zur Gleichung der Saite, ist also auch die Wellengleichung.

### 5.1.2.2 Lösung der Modellgleichung

Die Lösung der Modellgleichung (5.1.21) wird wieder durch Separation der Variablen  $w(x, t) = X(x)T(t)$  gewonnen. Sie hängt von den Randwerten

$$w(0, t) \text{ und } w(l, t), \quad t \geq 0.$$

und Anfangswerten

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < l$$

ab. Wir besprechen zwei Beispiele und fassen Resultate für andere gebräuchliche Randwerte in einer Tabelle zusammen.

#### Beispiel 24 Eingespannter Stab

*Hier gilt*

$$w(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad w_x(l, t) = 0,$$

*letzteres, weil die Spannung am freien Ende des Stabes Null ist.*

*Der Lösungsansatz für  $X(x)$*

$$X(x) = a \cos kx + b \sin kx$$

*wird differenziert*

$$X'(x) = -ak \sin kx + bk \cos kx.$$

*Aus  $w(0, t) = X(0)T(t) = 0$  folgt  $X(0) = 0$  und damit  $a = 0$ . Die charakteristische Gleichung folgt aus*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k \sin kl & k \cos kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*und*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -k \sin kl & k \cos kl \end{vmatrix} = 0$$

*zu  $\cos kl = 0$  und  $kl = 2(n+1)\pi/2$ . Hieraus folgen die Eigenwerte*

$$\lambda_n = k_n^2 = \left( \frac{2(n+1)\pi}{2} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Eigenformen  $X(x)$  sind damit

$$X(x) = b_n \sin\left(\frac{2(n+1)\pi x}{2l}\right)$$

und die natürlichen Frequenzen

$$\omega_n = \frac{2(n+1)\pi}{2l} c.$$

Damit wird die Gesamtlösung

$$w(x, t) = \sum_1^{\infty} (c_n \cos \omega_n t + d_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi x}{2l}\right),$$

mit

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi x}{2l}\right) dx$$

und

$$d_n = \frac{4}{(2n+1)\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi x}{2l}\right) dx$$

□

Beispiel 25 Stab mit Endmasse

In diesem Beispiel trage der eingespannte Stab an seinem freien Ende eine Zusatzmasse  $m_1$ .



Abbildung 5.4: Schwingender Stab mit Endmasse

Der Randwert am „linken“ Rand ist wieder  $w(0, t) = 0$ , und am „rechten“ Rand ergibt er sich aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen Zugkraft am Balkenende und Trägheitskraft der Endmasse.

$$AE \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = -m_1 \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial t^2}.$$

Die partiellen Ableitungen der Auslenkung  $w(x, t)$  erhält man aus dem Lösungsansatz

$$w_n(x, t) = (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x)(c_n \cos k_n ct + d_n \sin k_n ct)$$

zu

$$\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} = k_n (-a_n \sin k_n x + b_n \cos k_n x)(c_n \cos k_n ct + d_n \sin k_n ct)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 w_n(x, t)}{\partial t^2} = -k_n^2 c^2 (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x)(c_n \cos k_n ct + d_n \sin k_n ct).$$

Setzt man diese in die Randwertbedingung ein und berücksichtigt, daß  $a_n = 0$  ist (was aus dem linken Randwert folgt), dann ergibt sich

$$AE \cos k_n l = m_1 k_n c^2 \sin k_n l$$

oder

$$k_n l \tan k_n l = \frac{AE l}{c^2 m_1} = \frac{m}{m_1}.$$

Dies ist eine transzendente Gleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen  $k_n$ . Sie muß numerisch gelöst werden. Die rechte Seite ist das Verhältnis der Stabmasse  $m$  zur Endmasse  $m_1$ .

Für  $m = m_1$  sind die ersten drei Eigenfrequenzen  $k_1 l = \{0.8603, 3.4256, 6.4373\}$ .

□

Aufgabe 22 Formulieren Sie die Randbedingung für die Längsschwingung eines elastischen Stabes in der Konfiguration der folgenden Abbildung.

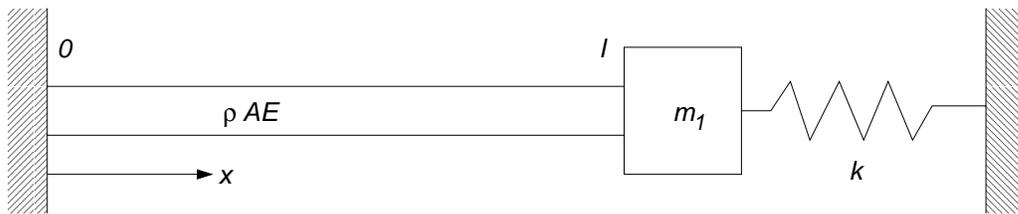


Abbildung 5.5: Schwingender Stab mit Endmasse und Federabstützung

Zeigen Sie, daß die Beziehung zur Gewinnung der Eigenfrequenzen  $k_n$

$$\tan k_n l = -\frac{EA k_n}{m_1 k_n^2 c^2 + k} \quad (5.1.22)$$

lautet, wobei  $k$  die Federkonstante ist.

□

### 5.1.2.3 Alternative Randwerte

Alternative Randwerte sind in Tabelle 5.1 zusammengefaßt.

Aufgabe 23 Beschreiben Sie den Unterschied zwischen Zeile 1 und 3 der Tabelle. Erklären Sie die physikalische Bedeutung.

□

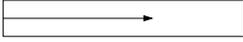
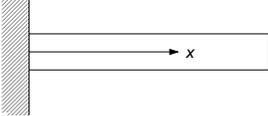
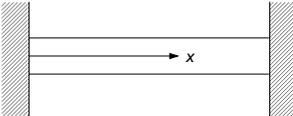
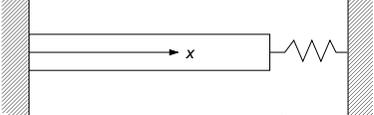
Konfiguration	Eigenwertgleichung	Eigenfrequenzen	Eigenformen
	$\sin k_n l = 0$	$k_n = \frac{n\pi c}{l}$	$\cos n\pi \frac{x}{l}$
	$\cos k_n l = 0$	$k_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$	$\sin \left( \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{l} \right)$
	$\sin k_n l = 0$	$k_n = \frac{n\pi c}{l}$	$\sin n\pi \frac{x}{l}$
	$k_n \cot k_n = \frac{kl}{EA}$	$k_n = \frac{n\pi c}{l}$	$\sin n\pi \frac{x}{l}$

Tabelle 5.1: Alternative Randwerte

### 5.1.3 Torsionsschwingungen von Stäben

#### 5.1.3.1 Mathematisches Modell

Das mathematische Modell der Torsionsschwingung von Stäben wird unter Bezug auf Abb. 5.6 gewonnen. Zwischen dem Torsionsmoment  $T(x, t)$  und dem Torsionswinkel  $\theta(x, t)$  besteht folgender Zusammenhang[20]:

$$T(x, t) = GJ(x) \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t),$$

mit  $G$  dem Schermodul des Stabmaterials und  $J(x)$  dem polaren Trägheitsmoment der Querschnittsfläche des Stabes.

Betrachtet werde ein infinitesimal kleiner Ausschnitt des Stabes der Länge  $dx$ , auf den ein äußeres Moment  $f(x, t)$  pro Längeneinheit wirke; Newtons zweites Gesetz ergibt

$$J_0(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(x, t) = T(x, t) + dT(x, t) - T(x, t) + f(x, t) dx$$

mit  $J_0(x)$  dem polaren Trägheitsmoment pro Längeneinheit  $dx$ . Mit  $dT(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) dx$  erhalten wir

$$J_0(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( GJ(x) \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right) dx + f(x, t) dx,$$

und für homogenes Material mit konstantem Querschnitt, also  $J_0 = \rho J$ , mit  $\rho$  der Materialdichte:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(x, t) = G \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) + f(x, t). \quad (5.1.23)$$

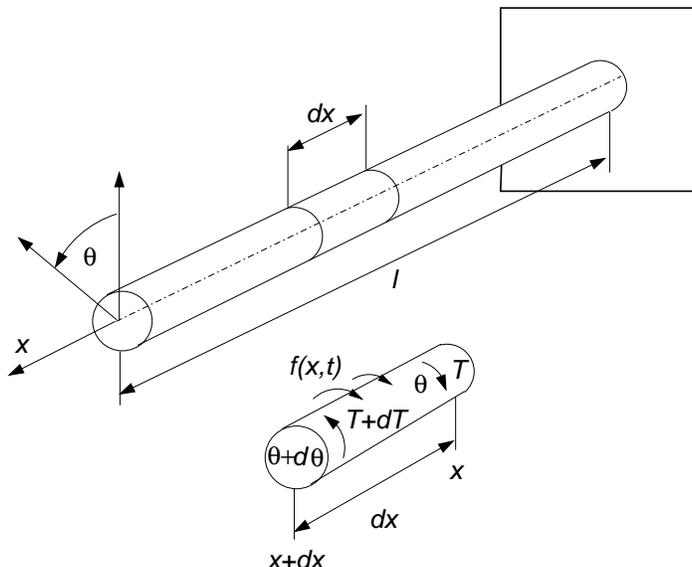


Abbildung 5.6: Tordierter Stab

Mit  $c = \sqrt{G/\rho}$  und  $f(x, t) = 0$  erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t). \quad (5.1.24)$$

Diese Beziehung ist strukturidentisch zur Saitengleichung (5.1.4) und zur Gleichung für die Longitudinalschwingung von Stäben (5.1.21).

## 5.2 Systeme vierter Ordnung

### 5.2.1 Biegeschwingung von Balken

#### 5.2.1.1 Mathematisches Modell

5.2.1.1.1 Euler-Theorie schlanker Balken In Abb. 5.7 ist ein Teilelement  $dx$  eines transversal schwingenden Balkens mit der Querschnittsfläche  $A(x)$  und dem Trägheitsmoment  $I(x)$  freigeschnitten.  $M(x, t)$  ist das Biegemoment,  $V(x, t)$  die Querkraft und  $f(x, t)$  eine externe Linienbelastung pro Einheitslänge.

Zur Modellbildung sei folgende vereinfachende Annahme getroffen, die mit guter Näherung für schlanke Balken ( $l/b, l/h > 10$ ) zutrifft [2, Kap. 11].

Annahme: Die Scher-Verformung sei klein gegenüber der Biegung  $w(x, t)$ , d.h. die Seiten des Elements  $dx$  verformen sich nicht und bleiben senkrecht zur Biegelinie.

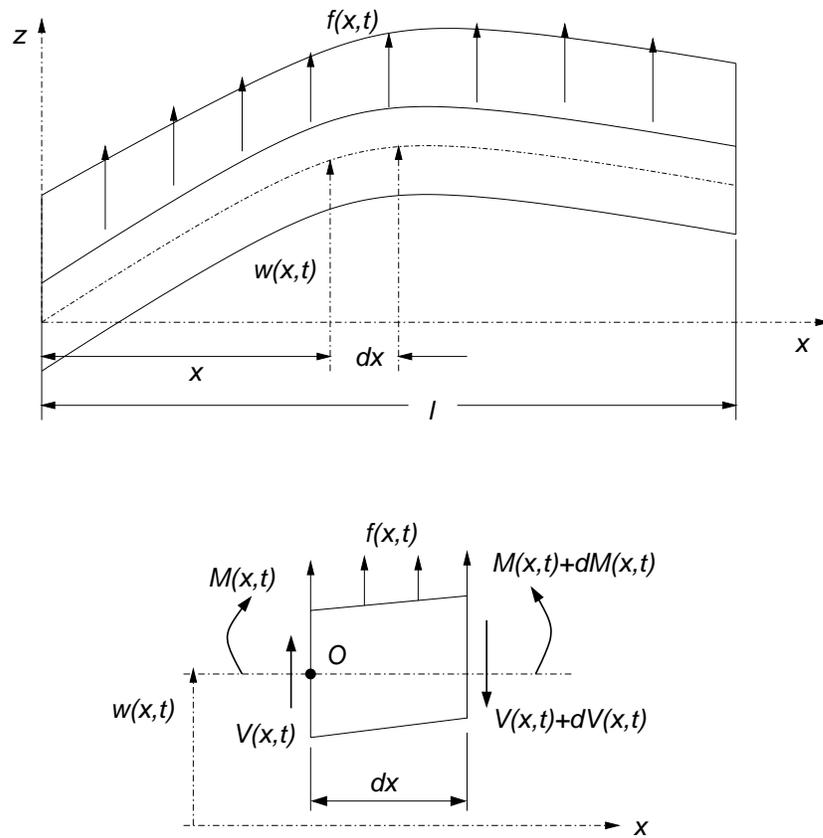


Abbildung 5.7: Biegung von Balken

Dann gilt für die am Element angreifenden Kräfte (Newton II):

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) = V(x, t) - (V(x, t) + dV(x, t)) + f(x, t) dx,$$

oder mit

$$dV(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx$$

$$\rho A(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = f(x, t). \quad (5.2.1)$$

Ebenso gilt für die Momente um O:<sup>3</sup>

$$-M(x, t) + (M(x, t) + dM(x, t)) - (V(x, t) + dV(x, t)) dx + \frac{1}{2} dx f(x, t) dx = 0$$

oder mit

$$dM(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx$$

und unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}.$$

Einsetzen dieser Beziehung in Gl. (5.2.1) ergibt

$$\rho A(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} M(x, t) = f(x, t).$$

Die Festigkeitslehre lehrt die Proportionalität von Biegemoment  $M(x, t)$  und Durchbiegung  $w(x, t)$  mit dem Elastizitätsmodul  $E$  als Proportionalitätsfaktor:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t).$$

Beide voranstehenden Beziehungen ergeben

$$\rho A(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) \right) = f(x, t).$$

Für konstantes  $A$  und  $I$  und ohne äußere Belastung  $f$  erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + c^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) = 0, \quad (5.2.2)$$

wobei

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.2.3)$$

ist.

---

<sup>3</sup>Wegen Annahme I ist wirkt kein Massenträgheitsmoment.

5.2.1.1.2 Randwerte und Anfangswerte Die Modellgleichung (5.2.2) ist eine lineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Zur Lösung sind vier Randwerte des Ortes und zwei Anfangswerte der Zeit notwendig: Es handelt sich wie in Abschnitt 5.1 um ein Anfangs-Randwert-Problem.

Die Randwerte werden durch die Balkenkonfiguration bestimmt: Für alle  $t \geq 0$  und  $i = 0$  oder  $i = l$  gelten folgende Bedingungen:

1. Eingespanntes Ende:  
Durchbiegung:  $w(i, t) = 0$ ,  
Neigung:  $\frac{\partial}{\partial x} w(i, t) = 0$ ,
2. Freies Ende:  
Scherkraft:  $EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(i, t) = 0$ ,  
Biegemoment:  $EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(i, t) = 0$ ,
3. Unterstütztes Ende:  
Durchbiegung:  $w(i, t) = 0$ ,  
Biegemoment:  $EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(i, t) = 0$ ,
4. Vertikal gleitendes Ende:  
Neigung:  $\frac{\partial}{\partial x} w(i, t) = 0$ ,  
Scherkraft:  $EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(i, t) = 0$ .

Für die Anfangswerte gilt für  $0 < x < l$ :

$$w(x, 0) = w_0(x),$$

und

$$\dot{w}(x, 0) = v_0(x),$$

die nicht beide identisch verschwinden dürfen.

#### 5.2.1.2 Lösung der Modellgleichung

Die Lösung der Modellgleichung (5.2.2) wird wieder durch Separation der Variablen  $w(x, t) = X(x)T(t)$  gewonnen. Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (5.2.2) führt auf

$$T''(t)X(x) + c^2 X''''(x)T(t) = 0,$$

welche Beziehung nach Umformung auf

$$c^2 \frac{X''''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad (5.2.4)$$

nur für eine Konstante  $\omega^2$  erfüllt sein kann, wie in Abschnitt 5.1 ausführlich dargelegt wurde.

Gl. (5.2.4) wird in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen getrennt:

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (5.2.5)$$

und

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (5.2.6)$$

wobei abkürzend

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (5.2.7)$$

steht.

5.2.1.2.1 Ortskomponente Lösungsansatz für Gl. (5.2.5) ist

$$X(x) = C e^{\lambda x},$$

welcher eingesetzt in diese Gleichung zu

$$(\lambda^4 - \beta^4) C e^{\lambda x} = 0$$

oder

$$\lambda^4 = \beta^4$$

mit den Lösungen

$$\lambda = \pm\beta, \pm j\beta$$

führt. Die Lösung ist damit

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{j\beta x} + C_4 e^{-j\beta x},$$

mit Konstanten  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , die aus den vier Randbedingungen errechnet werden.

Da

$$e^{\pm\beta x} = \cosh \beta x \pm \sinh \beta x$$

und

$$e^{\pm j\beta x} = \cos \beta x \pm j \sin \beta x,$$

wird

$$X(x) = c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x + c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x, \quad (5.2.8)$$

mit den  $c_i$  wiederum aus den Randbedingungen der Balkenkonfiguration.

Die Ermittlung der  $c_i$  sei gezeigt an folgendem

*Beispiel 26 in dem die Konfiguration eines an beiden Seiten frei gelagerten Balkens untersucht werden soll.*

*Die Randwerte sind hier:*

$$X(0) = X''(0) = X(l) = X''(l) = 0,$$


---

woraus sich mit Gl. (5.2.8) folgendes homogene Gleichungssystem für die  $c_i$  ergibt:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \sin \beta l & \cos \beta l & \sinh \beta l & \cosh \beta l \\ -\sin \beta l & -\cos \beta l & \sinh \beta l & \cosh \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und da  $c_2 + c_4 = 0$  und  $-c_2 + c_4 = 0$  sind, vereinfacht es sich zu

$$\begin{pmatrix} \sin \beta l & \sinh \beta l \\ -\sin \beta l & \sinh \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.9)$$

Diese Gleichung führt nur dann zu nichttrivialen Lösungen, wenn ihre Determinante gleich Null ist:

$$\sin \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l = 0,$$

woraus  $\sin \beta l = 0$  folgt, oder

$$\beta_n l = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

und damit

$$\beta_n = \frac{n}{l}\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.10)$$

Damit werden die Eigenfrequenzen mit der Beziehung (5.2.7)

$$\omega_n = \left(\frac{n}{l}\pi\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.11)$$

Aus Gl. (5.2.9) folgt

$$c_3 = \frac{\sin \beta l}{\sinh \beta l} c_1 = 0$$

und damit ist die Lösung

$$X_n(x) = c_{1_n} \sin \beta_n x. \quad (5.2.12)$$

□

Aufgabe 24 Wiederholen Sie Beispiel 26 für den einseitig und den beidseitig eingespannten Balken.

□

5.2.1.2.2 Zeitkomponente Nach Kap. 2.1 ist die Lösung der Zeitkomponente,

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0,$$

hier durch

$$T_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \quad (5.2.13)$$

formuliert, wobei die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  aus den Anfangswerten bestimmt werden, und die  $\omega_n$  während der Berechnung der Ortskomponente  $X(x)$  angefallen sind.

Beispiel 27 Wir führen Beispiel 26 fort und geben als  $w_0(x) = \sin 2\pi \frac{x}{l}$  und  $\dot{w}(x) = v_0(x) = 0$  an.

Die letzte Bedingung führt wegen

$$\frac{d}{dt}T_n(0) = -a_n \times 0 + b_n \times 1 = 0$$

auf  $b_n = 0$  und damit wird die Gesamtlösung

$$w(x, t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_1 c_1)_n \cos \omega_n t + (a_1 c_1)_n \sin \omega_n t] \sin \beta_n x,$$

wobei die  $(a_1 c_1)_n = \alpha_n$  neue Parameter sind, die aus der verbleibenden Anfangsbedingung  $w(x)$  wie folgt berechnet werden.

Es ist

$$w_0(x) = \sin 2\pi \frac{x}{l} = w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \beta_n x,$$

und damit werden die

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, 3, 4, \dots, \\ 1 & \text{falls } n = 2. \end{cases}$$

So daß die endgültige Problemlösung

$$w(x, t) = \cos \omega_2 \sin 2\pi \frac{x}{l}$$

heißt.

□

Aufgabe 25 Führen Sie Aufgabe 24 analog zu Beispiel 27 fort.

□

5.2.1.2.3 Timoshenko-Theorie dicker Balken Wenn die zu Beginn von Paragraph 5.2.1.1.1 getroffene Annahme schlanker Balken aufgegeben wird, dann muß auch der Einfluß der Scherverformung und der rotatorischen Trägheit im Modell berücksichtigt werden. Biegung des Balkens zieht eine zeitlich veränderliche Biegelinie nach sich; der entsprechenden rotatorischen Beschleunigung wirkt eine rotatorische Trägheitskraft entgegen, die bei hoher Biegegeschwindigkeit durchaus nicht zu vernachlässigen ist.

Die Modellkomponenten seien an Hand von Abb. 5.8 erläutert. Das betrachtete Balkenelement hat die Länge  $dx$ , sein Massenmittelpunkt sei  $O$ . Die Gerade  $O - N$  ist die Normale auf die Seitenfläche des Elements durch  $O$ , die Gerade  $O - T$  die Tangente an die Biegelinie in  $O$ , die Gerade  $O - O'$  ist die Biegelinie im Ruhezustand. Die Abweichung der Tangente  $O - T$  aus der Ruhelage  $O - O'$  ist durch den Winkel  $\alpha = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$  gekennzeichnet. Für Balken mit Scherverformung

fallen O–T und O–N nicht mehr zusammen: Es ergibt sich ein Scherwinkel  $\gamma = \phi - \alpha$ . Die Scherung hat nur Verformung, keine Rotation zur Folge. Die Rotation ist Konsequenz der Verformung in Zusammenhang mit der Durchbiegung des Balkenelements.

Für das Biegemoment  $M$  und die Scherkraft  $V$  übernehmen wir folgende Zusammenhänge aus der Festigkeitslehre[3]:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) \quad (5.2.14)$$

und

$$V(x, t) = kA(x)G\gamma = kA(x)G\left(\phi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} w(x, t)\right) \quad (5.2.15)$$

mit  $G$  dem Schermodul und  $k$  einem Formfaktor, der die Querschnittsform berücksichtigt. Dieser Faktor wird heißt Timoshenko-Scher-Koeffizient und ist  $k = \frac{5}{6}$  für Rechteckquerschnitte und  $k = \frac{9}{10}$  für Kreisquerschnitte[10].

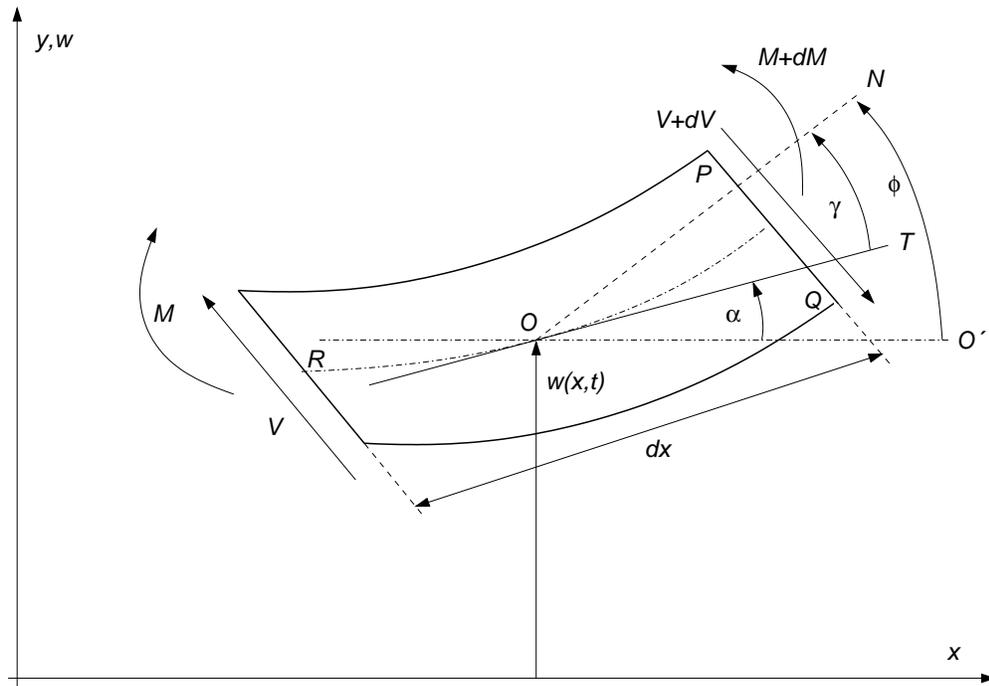


Abbildung 5.8: Timoshenko-Balken

Die Newton- und Eulergleichungen der Translation und Rotation des Balkenelement können nun wie folgt formuliert werden:

1. Translation in  $y$ -Richtung

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) = V(x, t) - (V(x, t) + dV(x, t)) + f(x, t) dx,$$

2. Rotation parallel zur  $z$ -Achse um  $R$

$$\rho I(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) = -M(x, t) + (M(x, t) + dM(x, t)) + (V(x, t) + dV(x, t)) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2}.$$

Einsetzen der Ausdrücke für Biegemoment und Scherkraft in diese beiden Gleichungen und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in  $dx$  führt auf

$$\rho A(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ kA(x) G \left( \phi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \right) \right] + f(x, t)$$

und

$$\rho I(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) - kA(x) G \left( \phi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \right).$$

Für konstanten Querschnitt kann die erste dieser Gleichungen nach  $\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t)$  aufgelöst und in die zweite eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) - \rho \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} w(x, t) + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4}{\partial t^4} w(x, t) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) \\ = f(x, t) + \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) - \frac{\rho I}{kAG} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t), \end{aligned}$$

und für den homogenen Fall  $f(x, t) = 0$ :

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) - \rho \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.2.16)$$



# Kapitel 6

## Technische Anwendungen

### 6.1 Schwingungsdämpfung

### 6.2 Schwingungstilgung

Viele technische Einrichtungen der Feinmechanik (optische Meßeinrichtungen u.ä.) sind auf höchste Schwingungsarmut angewiesen. Diese wird durch Schwingungstilgung oder Schwingungsabsorption erreicht. Dazu wird die elastisch aufgehängte Primärmasse  $m_1$  durch einen Absorber mit der Masse  $m_2$  entsprechend der Abb. 6.1 ergänzt. Das ursprüngliche Ein-Freiheitsgrad-System wird dadurch zum Zwei-Freiheitsgrad-System.

#### 6.2.1 Ungedämpfte Schwingungstilgung

Zunächst sei keine Dämpfung im System vorausgesetzt. Die Anregung der Primärmasse sei  $f(t) = F_0 \sin \omega t$ , dann gelten folgende Systemgleichungen:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.1)$$

in die der Ansatz

$$x_i(t) = X_i \sin \omega t, \quad i = 1, 2, \quad (6.2.2)$$

eingesetzt, folgendes Gleichungssystem ergibt:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dessen Lösung ist:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} (k_2 - m_2\omega^2)F_0 \\ k_2F_0 \end{pmatrix} \quad (6.2.3)$$

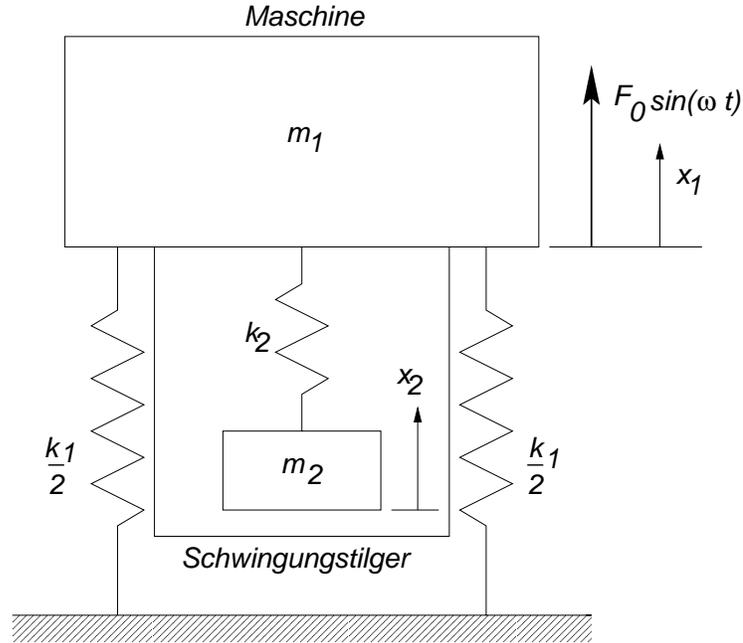


Abbildung 6.1: Schwingungstilgung

mit  $\det(\mathbf{A}) = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2$ .

Tilgungsziel ist es, die Amplitude  $X_1$  der Primärmasse, der eigentlichen Maschine, zu Null zu machen, d.h.

$$X_1 = \frac{k_2 - m_2 \omega^2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} F_0 = 0, \quad (6.2.4)$$

woraus die Abstimmungsbedingung für den Isolator

$$\boxed{\frac{k_2}{m_2} = \omega^2} \quad (6.2.5)$$

folgt. Diese Bedingung soll insbesondere die Vibrationen nahe der Systemresonanz

$$\omega_{11}^2 = \frac{k_1}{m_1} \approx \omega$$

absorbieren,<sup>1</sup> was zusammen mit Gl. (6.2.5) zu

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}$$

führt. Mit diesen Beziehungen und den Definitionen

$$\eta_1 = \frac{\omega}{\omega_{11}} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \frac{\omega}{\omega_{22}}$$

<sup>1</sup>Beachten Sie, daß  $\omega_{11}$  und  $\omega_{22}$  die Eigenfrequenzen der beiden getrennten Systeme (Maschine und Absorber) sind.

und der statischen Auslenkung  $\Delta = F_0/k_1$  wird die Lösung (6.2.3) als

$$\frac{X_1}{\Delta} = \frac{1 - \eta_1^2}{\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \eta_1^2\right) (1 - \eta_2^2) - \frac{k_2}{k_1}} \quad (6.2.6a)$$

$$\frac{X_2}{\Delta} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \eta_1^2\right) (1 - \eta_2^2) - \frac{k_2}{k_1}} \quad (6.2.6b)$$

Der Absolutwert von (6.2.6a) ist für  $\mu = m_1/m_2 = 1/4$  in Abb. 6.2 dargestellt.

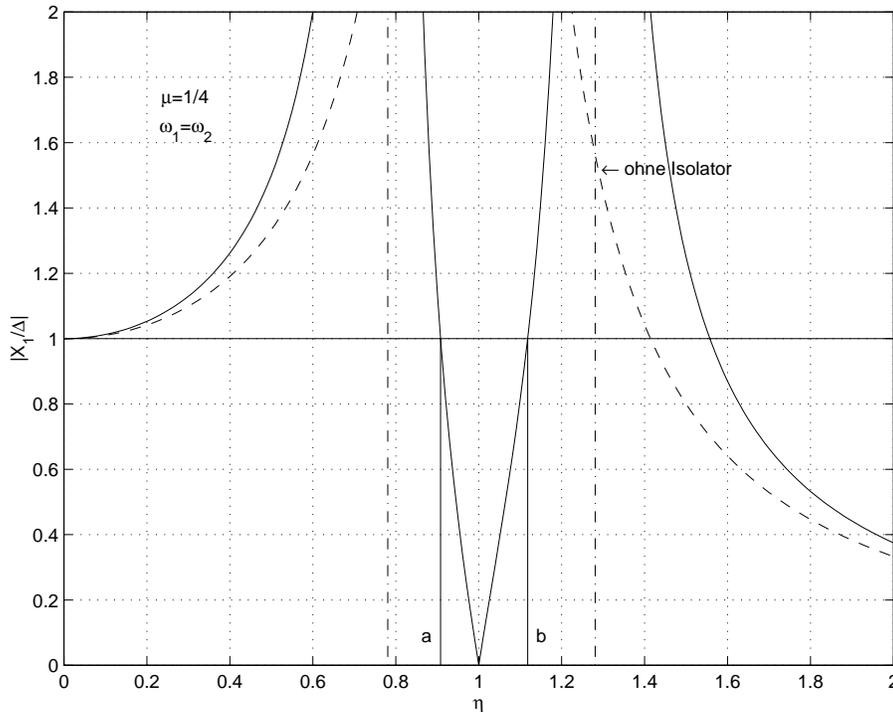


Abbildung 6.2: Vergrößerung der schwingungs isolierten Maschine

Aufgabe 26 Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Eigenfrequenzen  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , des Gesamtsystems von Abb. 6.2.

□

Bei der Tilgungsfrequenz  $\omega_{11} = \omega$  wird die Amplitude  $X_2$  des Isolators nach Gl. (6.2.6b)

$$X_2 = -\frac{F_0}{k_2}$$

und damit die Reaktionskraft des Tilgers auf die Primärmaschine

$$F_2 = k_2 X_2 = -F_0.$$

D.h. die Reaktionskraft  $F_2$  kompensiert die Anregung  $F_0$  der Primärmaschine.

## 6.2.1.1 Eigenwerte der isolierten Maschine

Die beiden Eigenwerte der isolierten Maschine ergeben sich als Nullstelle der Determinante  $\det(\mathbf{A})$  mit folgenden Definitionen:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_{11}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \nu^2(1 + \mu) \pm \sqrt{\nu^4(1 + \mu)^2 - 2(1 - \mu)\nu^2 + 1}}. \quad (6.2.7)$$

In Abb. 6.3 sind die Eigenwerte als Funktion der Isolator­masse für unterschiedliche Parameter  $\nu$  dargestellt.

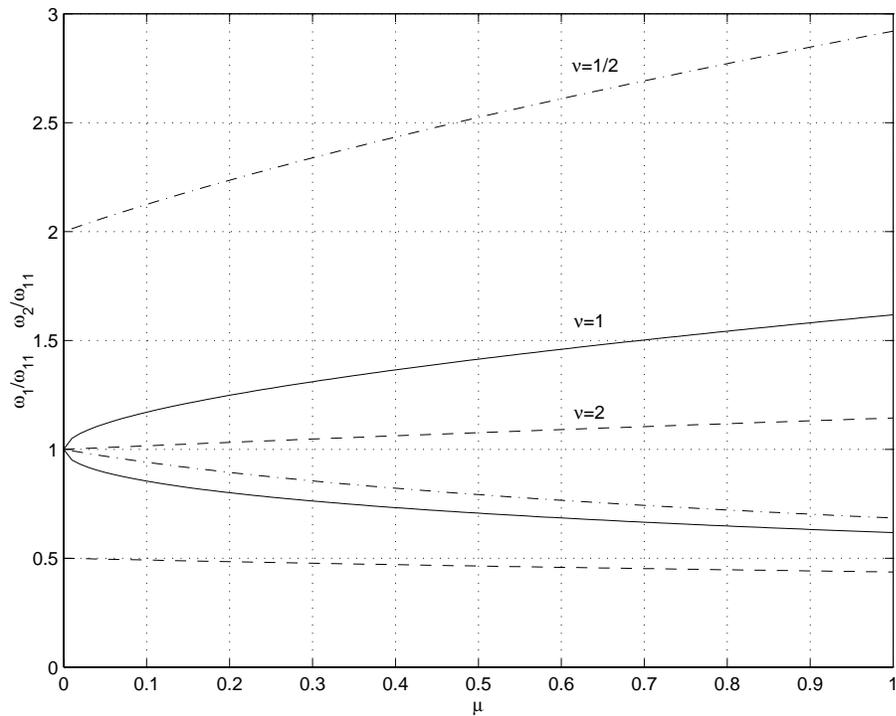


Abbildung 6.3: Eigenwerte als Funktion der Isolator­masse

- Bemerkung 1
1. Aufgabe 26 und Gl. (6.2.7) zeigen, daß ein Eigenwert  $\omega_1$  unter der Isolationsfrequenz  $\omega_{11}$  liegt, und der zweite  $\omega_2$  darüber. D.h. daß beim Hochfahren der Maschine immer durch die Resonanzfrequenz  $\omega_1$  gefahren werden muß. Dort ist die Amplitude sehr groß-
  2. Die Vibrationen der Maschine werden nur für eine bestimmte Frequenz getilgt; für andere (Betriebs-)Frequenzen können die Amplituden durchaus störend hoch werden.

3. Die Spreizung des Empfindlichkeitsbereichs (a-b) in Abb. 6.2 hängt ab vom Massenverhältnis  $\mu$ , und dieser Bereich wird mit wachsendem  $\mu$  vergrößert, s.a. Abb. 6.3.

### 6.2.2 Gedämpfte Schwingungstilgung

Nach Einführung einer viskosen Dämpfung entsprechend Abb. 6.4 wird Gl. (6.2.1)

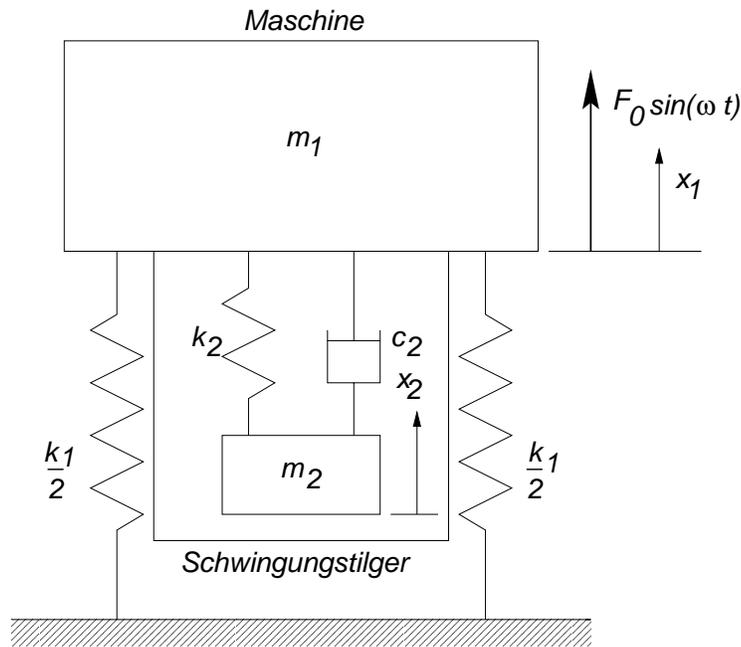


Abbildung 6.4: Gedämpfte Schwingungstilgung

folgendermaßen ergänzt:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\omega t}, \quad (6.2.8)$$

oder allgemein:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}e^{j\omega t}, \quad (6.2.9)$$

in die nun wegen der durch die Dämpfung eingeführten Phasenverschiebung zwischen Eingang und Ausgang der Lösungsansatz

$$x_i = X_i e^{j\omega t}, \quad i = 1, 2, \quad (6.2.10)$$

eingesetzt wird. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem für die Amplituden  $X_i$ :

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 + j(c_1 + c_2)\omega & -k_2 - jc_2\omega \\ -k_2 - jc_2\omega & k_2 - m_2\omega^2 + jc_2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.11)$$

und daraus

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} k_2 - m_2\omega^2 + jc_2\omega & k_2 + jc_2\omega \\ k_2 + jc_2\omega & k_1 + k_2 - m_1\omega^2 + j(c_1 + c_2)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.12)$$

mit  $\mathbf{A} = \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C}$  und  $\det(\mathbf{A})$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= m_1 m_2 \omega^4 - j(m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2) \omega^3 \\ &\quad - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2 + c_1 c_2) \omega^2 + j(c_1 k_2 + c_2 k_1) \omega + k_1 k_2. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Aus Gl. (6.2.12) berechnen sich die (komplexen) Amplituden zu

$$X_1 = \frac{k_2 - m_2\omega^2 + jc_2\omega}{|\mathbf{A}|} F_0, \quad (6.2.14a)$$

$$X_2 = \frac{k_2 + jc_2\omega}{|\mathbf{A}|} F_0. \quad (6.2.14b)$$

Der Absolutwert der auf die statische Auslenkung  $\Delta_1 = F_0/k_1$  normierten Amplituden  $X_i$  wird für den wichtigen Fall  $c_1 = 0$  mit

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \nu = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}, \quad \zeta = \frac{c_2}{2m_2\omega_1}, \quad \eta_1 = \frac{\omega}{\omega_{11}}$$

berechnet als

$$\left| \frac{X_1}{\Delta_1} \right| = \sqrt{\frac{(2\zeta\eta_1)^2 + (\eta_1^2 - \nu^2)^2}{(2\zeta\eta_1)^2(-1 + (1 + \mu)\eta_1^2)^2 + (\mu\nu^2\eta_1^2 + (1 - \eta_1^2)(\eta_1^2 - \nu^2))^2}}, \quad (6.2.15a)$$

$$\left| \frac{X_2}{\Delta_1} \right| = \sqrt{\frac{(2\zeta\eta_1)^2 + \nu^4}{(2\zeta\eta_1)^2(-1 + (1 + \mu)\eta_1^2)^2 + (\mu\nu^2\eta_1^2 + (1 - \eta_1^2)(\eta_1^2 - \nu^2))^2}}. \quad (6.2.15b)$$

Die Maschinenauslenkung  $|X_1/\Delta_1|$  ist in Abb. 6.5 für  $\mu = 1/4$ ,  $\nu = 1$ ,  $\eta_1 = 1$  und verschiedene  $\zeta$  dargestellt. Es ist zu erkennen, was schon Gl. (6.2.14a) zeigt, daß für kein  $\omega$  die Maschinenamplitude  $X_1$  mehr Null ist. Dafür ist aber gegenüber dem ungedämpften Fall in Abb. 6.2 der Bereich  $[a, b]$ , in welchem  $X_1/\Delta_1 \leq 1$  gilt, aufgeweitet, d.h. das System ist unempfindlicher gegenüber Änderungen der nominellen Drehzahl.

### 6.2.2.1 Optimierung

## 6.3 Experimentelle Modalanalyse

### 6.3.1 Stochastische Signale

In der experimentellen Modalanalyse werden als Erregerfunktionen Zufallssignale  $f(t)$  verwendet, bei denen  $f(t)$  für ein bestimmtes  $t$  nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit bekannt ist. Diese Signale können nicht in ihre Fourier-Anteile zerlegt werden, da sie:

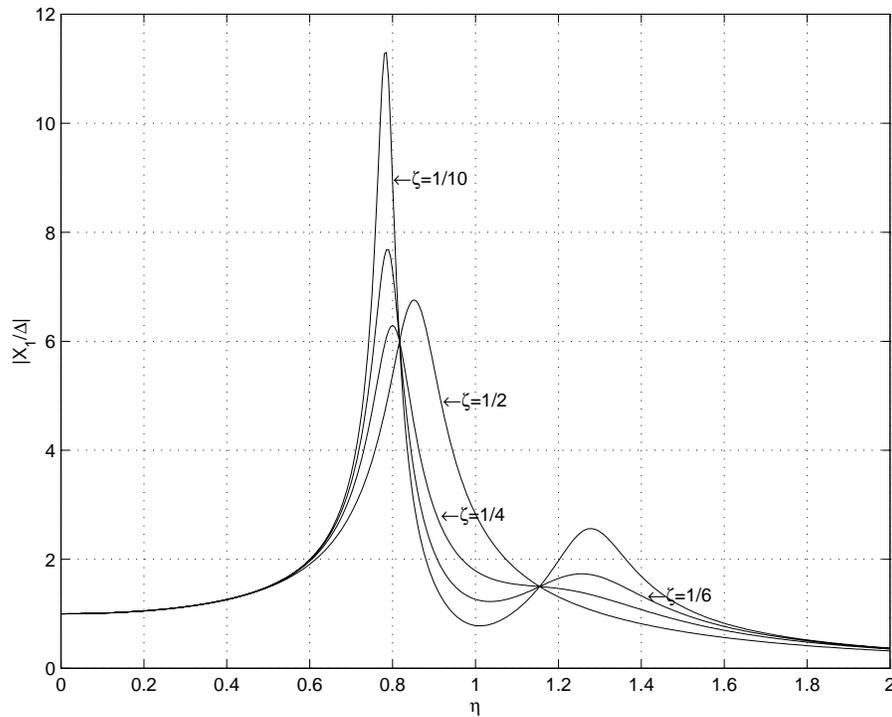


Abbildung 6.5: Vergrößerungsfunktion bei gedämpfter Isolation

- nicht periodisch sind,
- und nicht der Dirichlet-Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

genügen.

Das zu vermessende System wird nicht mit einer Probe  $f(t)$  angeregt, sondern es wird eine bestimmte, statistisch signifikante Anzahl von Experimenten durchgeführt, und deren Resultate  $x(t)$  zu einem Ensemble zusammengefaßt. Wichtige Zufallsfunktionen sind solche, deren statistische Eigenschaften nicht von der Zeit  $t$  abhängen; man nennt sie stationäre Zufallsfunktionen. Z.B. ist ihr Mittelwert  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (6.3.1)$$

konstant. Der quadratische Mittelwert oder die Varianz  $\bar{x}^2$

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (6.3.2)$$

ist ein Maß für die Schwankungen des Signals  $x(t)$ . Die Quadratwurzel aus der Varianz ist<sup>2</sup>

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{x}^2}.$$

Die Autokorrelationsfunktion  $R_{xx}(\tau)$  ist definiert als

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt. \quad (6.3.3)$$

Sie ist ein Maß dafür, wie schnell sich das Signal  $x(t)$  mit der Zeit ändert. Die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion ist die spektrale Leistungsdichte  $S_{xx}(\omega)$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (6.3.4)$$

oder rücktransformiert:<sup>3</sup>

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \quad (6.3.5)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion zweier Signale  $x(t)$  und  $f(t)$  ist

$$R_{xf}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)f(t+\tau)dt, \quad (6.3.6)$$

und deren Fourier-Transformierte ist:

$$S_{xf}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}e^{-j\omega\tau}d\tau. \quad (6.3.7)$$

Aus den Definitionen folgt sofort:

$$R_{fx}(\tau) = R_{xf}(-\tau) \quad (6.3.8)$$

und

$$S_{fx}(\omega) = S_{xf}^*(\omega), \quad (6.3.9)$$

mit  $S_{xf}^*(\omega)$  der konjugiert-komplexen Funktion  $S_{fx}(\omega)$ .

Kreuzkorrelationen beinhalten Informationen über die Abhängigkeit unterschiedlicher Signale. Sie geben z.B. an, ob eine Schwingung an einem bestimmten Ort einer Struktur eine Schwingung an einem anderen Ort beeinflusst. Ist die Kreuzkorrelation für einen bestimmten Wert von  $\tau$  hoch, dann ist der wechselseitige Einfluß groß, und die gegenseitige Übertragungszeit beträgt  $\tau$ .

Unter Zuhilfenahme längerer Umrechnungen von Fourier-Integralen können für gedämpfte mechanische Systeme folgende Beziehungen gezeigt werden[32, Seite 26–29]:

$$S_{fx}(\omega) = H(\omega)S_{ff}(\omega) \quad (6.3.10)$$

und

$$S_{xx}(\omega) = H(\omega)S_{xf}(\omega) \quad (6.3.11)$$

<sup>2</sup>Sie heißt im Englischen root-mean-square value.

<sup>3</sup>Gl. (6.3.4) und Gl. (6.3.5) sind die Beziehungen von Wiener und Khintchine.

und

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega). \quad (6.3.12)$$

Damit wird die spektrale Leistungsdichte des Systemausgangs  $S_{xx}$  mit der des Eingangs  $S_{ff}$  über das Quadrat des Betrags des Frequenzgangs<sup>4</sup>  $H(\omega)$  verbunden

Da sowohl Gl. (6.3.10) als auch Gl. (6.3.11) eine Basis zur Berechnung des Frequenzganges  $H(\omega)$  bilden, kann sowohl die eine als auch die andere zur Überprüfung von  $H$  herangezogen werden. Am einfachsten geschieht dies durch Auswertung der Kohärenzfunktion  $\gamma^2$

$$\begin{aligned} \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} &= \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \times \frac{S_{xf}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{fx}(\omega)S_{fx}^*(\omega)}{S_{ff}(\omega)S_{xx}(\omega)} \\ &= \frac{|S_{fx}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{ff}(\omega)} =: \gamma^2(\omega). \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Es gilt

$$0 < \gamma^2 \leq 1,$$

und die Messungen sind kohärent für  $\gamma^2 = 1$ , d.h. sie sind nicht durch Meßrauschen kontaminiert. Bei  $\gamma^2 = 0$  haben Sie reines Rauschen gemessen.

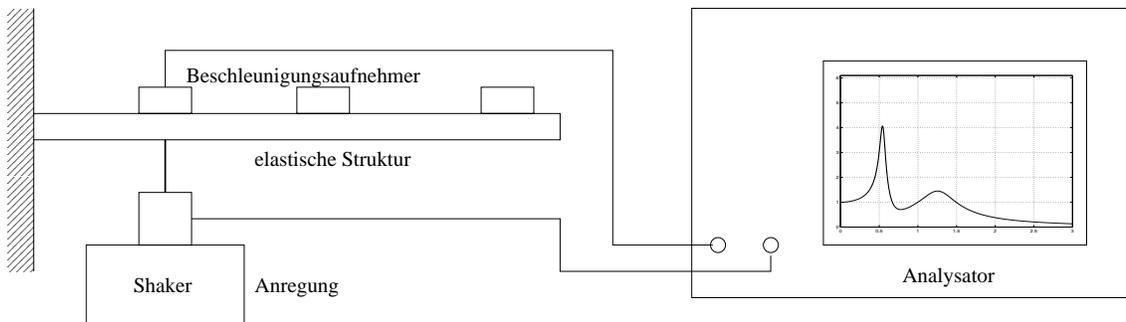


Abbildung 6.6: Schwingungsmessung

### 6.3.2 Ermittlung der System-Parameter

Die Ermittlung der Systemparameter erfolgt durch geeignete Auswertung der Frequenzgänge, deren Messung im vorangegangenen Abschnitt beschrieben ist.

Es werden Systeme mit mehreren Freiheitsgraden untersucht, die an unterschiedlichen Orten  $\{l\}$  mit  $f_l$  angeregt werden, und deren Ausgänge  $x_k$  an den Orten  $\{k\}$  gemessen werden. Die jeweiligen Frequenzgänge  $X_k/F_l$  werden in der Rezeptanzmatrix  $H_{kl}$  zusammengefaßt.

Weiter wird angenommen, daß die Resonanzfrequenzen der unterschiedlichen Eigenfrequenzen gut getrennt liegen. Dann wird das Gesamtsystem jeweils als ein

<sup>4</sup>Dies ist der Amplitudengang.

System mit einem Freiheitsgrad an der jeweiligen Eigenfrequenz  $\omega_i$  betrachtet und analysiert.

### 6.3.2.1 Eigenfrequenz und Dämpfung

Die  $i$ -te Eigenfrequenz  $\omega_i$  wird dort angenommen, wo das  $i$ -te Maximum des Amplitudengangs auf der Frequenzabszisse gefunden wird, s.a. Abschnitt 2.3.2:

$$\eta_{\max} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (6.3.14)$$

und

$$V_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (6.3.15)$$

Das Dämpfungsverhältnis  $\zeta_i$  wird aus der Bandbreite  $\Delta\omega_i = 2\zeta_i\omega_i$  zu

$$\zeta_i = \frac{\Delta\omega_i}{2\omega_i} \quad (6.3.16)$$

berechnet. Dabei wird die Bandbreite als Frequenz-Differenz der Schnittpunkte der Geraden  $\frac{1}{\sqrt{2}}V_{\max}$  mit dem Graphen des Amplitudengangs gewonnen, s.a. Abb. 2.12 auf Seite 39.

### 6.3.2.2 Eigenvektoren

Unter den mannigfachen Methoden zur Bestimmungen der modalen Parameter aus Schwingungsmessungen[14, 32] sei die modifizierte Ewins-Gleeson-Methode[31, 15] wegen ihrer didaktischen Klarheit gewählt

Ausgangspunkt ist das Mehrgrößensystem aus Abschnitt 3.2.1, Gl. (3.2.1), mit  $\mathbf{f}e^{j\omega t}$  als anregender rechter Seite:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}e^{j\omega t}. \quad (6.3.17)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{j\omega t}$$

in Gl. (6.3.17) eingesetzt wird

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C})\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

erhalten, woraus

$$\mathbf{u} = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f} \quad (6.3.18)$$

gewonnen wird. Die Inverse in Gl. (6.3.18)

$$\alpha(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C})^{-1} \quad (6.3.19)$$

wird Rezeptanz-Matrix genannt.

Durch die Transformation (Diagonalisierung) von Gl. (6.3.17) von räumlichen Koordinaten  $\mathbf{x}(t)$  nach modalen Koordinaten  $\mathbf{p}(t)$  mittels  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}$  und  $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$ , mit  $\mathbf{V}$  der orthonormalen Matrix der Eigenvektoren von  $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}$ , wird auch die Rezeptanz-Matrix folgendermaßen diagonalisiert:

1. Transformation:

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \Delta \dot{\mathbf{p}}(t) + \Lambda \mathbf{p}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{e}^{j\omega t},$$

2. Diagonalmatrizen:

$$\Delta = \text{diag}(2\zeta_i \omega_i) = \mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V}$$

und

$$\Lambda = \text{diag}(\omega_i^2) = \mathbf{V}^T \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V},$$

3. Einsetzen von

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{V} \Delta \mathbf{V}^T \mathbf{M}^{1/2}$$

und

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^T \mathbf{M}^{1/2}$$

in Gl. (6.3.19) mit  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{V}$

4. Rezeptanz-Matrix:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= (\mathbf{Q}(\Lambda - \omega^2 \mathbf{I} + j\omega \Delta) \mathbf{Q}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{Q}^{-T} \text{diag}(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \omega_i \omega)^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{Q}^{-T} \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \omega_i \omega} \right) \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \omega_i \omega}, \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

wobei die  $\mathbf{u}_i$  die Eigenvektoren des Systems (6.3.17) sind.

Mit Gl. (6.3.20) ist ein Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren  $\mathbf{u}_i$  und der Rezeptanz-Matrix  $\alpha(\omega)$  hergestellt. Die Rezeptanz-Matrix enthält als Elemente die Frequenzgänge zwischen Eingang  $f_l$  und Ausgang  $u_k$ , also<sup>5</sup>

$$\alpha_{kl}(\omega) = H_{kl}(j\omega) = \frac{u_k}{F_l}. \quad (6.3.21)$$

Für  $\omega = \omega_i$  erhält man aus Gl. (6.3.20) für den Betrag des Elementes  $\{kl\}$  der Frequenzgangsmatrix die Approximation<sup>6</sup>

$$|\alpha_{kl}(\omega_i)| = \frac{|\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T|_{kl}}{2\zeta_i \omega_i^2} \quad (6.3.22)$$

und damit

$$|\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T|_{kl} = 2\zeta_i \omega_i^2 |H_{kl}(\omega_i)|. \quad (6.3.23)$$

Das Vorzeichen von  $|\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T|_{kl}$  wird dem Phasendiagramm  $H(\omega_i)$  entnommen.

<sup>5</sup>Die restlichen Eingänge  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq l$  werden Null gehalten.

<sup>6</sup>Wegen der Resonanzüberhöhung bei  $\omega = \omega_i$  sind die restlichen Summanden aus (6.3.20) klein gegenüber (6.3.22).

6.3.2.2.1 Betrag der Eigenvektorelemente Wie werden nun aus der gemessenen Rezeptanz-Matrix die Eigenvektoren  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gewonnen? Darüber geben die Matrizen  $\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$  Auskunft: Dies sind Dyaden der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T &= \begin{pmatrix} u_{i,1}^2 & u_{i,1}u_{i,2} & \cdots & u_{i,1}u_{i,n} \\ u_{i,2}u_{i,1} & u_{i,2}^2 & \cdots & u_{i,2}u_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i,n}u_{i,1} & u_{i,n}u_{i,2} & \cdots & u_{i,n}^2 \end{pmatrix} \\ &= 2\zeta_i \omega_i^2 \begin{pmatrix} |H_{11}(\omega_i)| & |H_{12}(\omega_i)| & \cdots & |H_{1n}(\omega_i)| \\ |H_{21}(\omega_i)| & |H_{22}(\omega_i)| & \cdots & |H_{2n}(\omega_i)| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |H_{n1}(\omega_i)| & |H_{n2}(\omega_i)| & \cdots & |H_{nn}(\omega_i)| \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

die bekanntlich den Rang Eins haben[46] und deren Zeilen oder Spalten alle von einer linear abhängig sind. Es muß also bereits eine Zeile, z.B. die erste, alle notwendigen Informationen liefern. Aus Gl. (6.3.24) erhält man zunächst:

$$u_{i,1} = \sqrt{2\zeta_i \omega_i^2 |H_{11}(\omega_i)|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.3.25)$$

und dann sukzessive:

$$u_{i,j} = \frac{2\zeta_i \omega_i^2 |H_{1,j}(\omega_i)|}{u_{i,1}}, \quad j = 2, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.3.26)$$

6.3.2.2.2 Vorzeichen der Eigenvektorelemente Die Vorzeichen der Eigenvektorelemente werden aus dem Graphen des Phasengangs entnommen:

Für  $\omega = \omega_i$   $i = 1, \dots, n$  gilt:

$$u_{i,j} = \begin{cases} > 0 & \text{wenn die Phase } \angle H_{i,j} = +90^\circ, \\ < 0 & \text{wenn die Phase } \angle H_{i,j} = -90^\circ. \end{cases} \quad (6.3.27)$$

### 6.3.2.3 Beispiel

Gegeben sei folgendes dynamische System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \cos \omega t,$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mu \mathbf{M} + \kappa \mathbf{K}$$

mit  $\mu = 1/10$  und  $\kappa = 1/40$ .

Das folgende ist als Maple-Worksheet ausgeführt:

```
> restart;
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
```

Warning, new definition for trace

> M:=matrix([[1,0],[0,1]]);

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> K:=matrix([[2,-1],[-1,2]]);

$$K := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

> mu:=1/10;

$$\mu := \frac{1}{10}$$

> kappa:=1/40;

$$\kappa := \frac{1}{40}$$

> C:=mu\*M+kappa\*K;

$$C := \frac{1}{10} M + \frac{1}{40} K$$

> A:=K-omega^2\*M+I\*omega\*C;

$$A := K - \omega^2 M + I \omega \left( \frac{1}{10} M + \frac{1}{40} K \right)$$

> H:=inverse(A);

$$H := \begin{bmatrix} -16 \frac{40 - 20 \omega^2 + 3 I \omega}{\%1} & -8 \frac{40 + I \omega}{\%1} \\ -8 \frac{40 + I \omega}{\%1} & -16 \frac{40 - 20 \omega^2 + 3 I \omega}{\%1} \end{bmatrix}$$

$$\%1 := -960 + 1287 \omega^2 - 176 I \omega - 320 \omega^4 + 96 I \omega^3$$

> plot(abs(H[1,1]),omega=0..3):

> plot(argument(H[1,1]),omega=0..3):

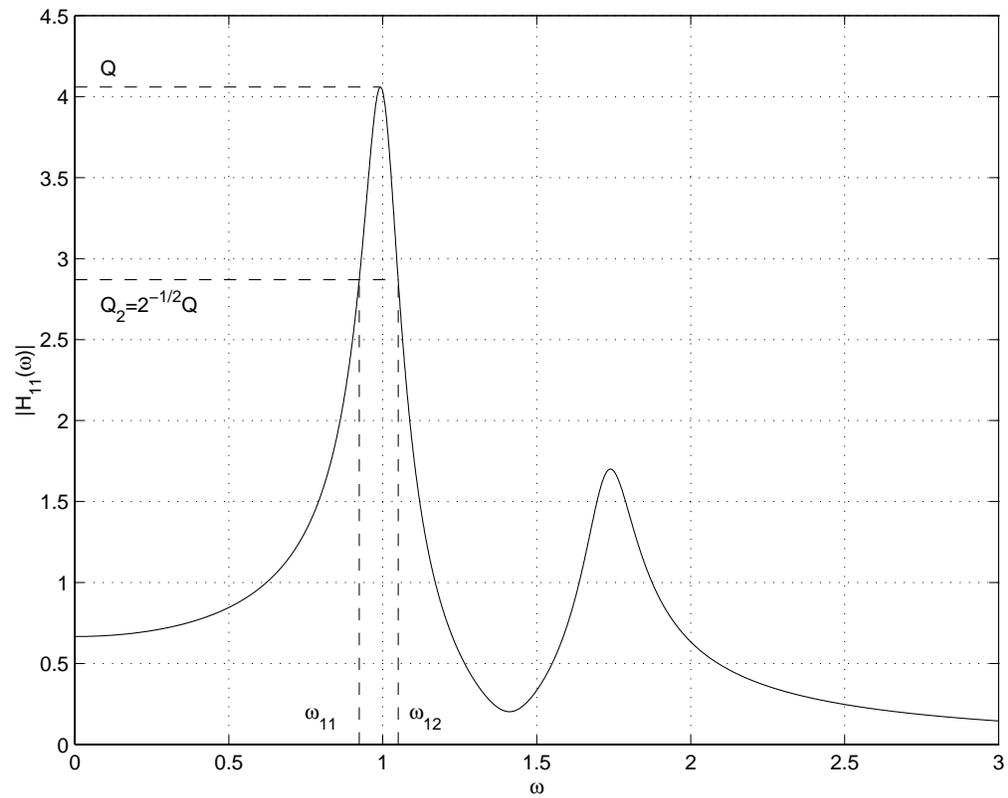
> plot(abs(H[2,1]),omega=0..3):

> plot(argument(H[2,1]),omega=0..3):

> eiv:=eigenvectors(K);

$$eiv := [1, 1, \{[1, 1]\}, [3, 1, \{-1, 1\}]]$$

> v1:=eiv[1,3,1];

Abbildung 6.7: Amplitudengang  $H_{11}$ 

$$v1 := [1, 1]$$

```
> v1n:=v1/norm(v1,2);
```

$$v1n := \frac{1}{2} v1 \sqrt{2}$$

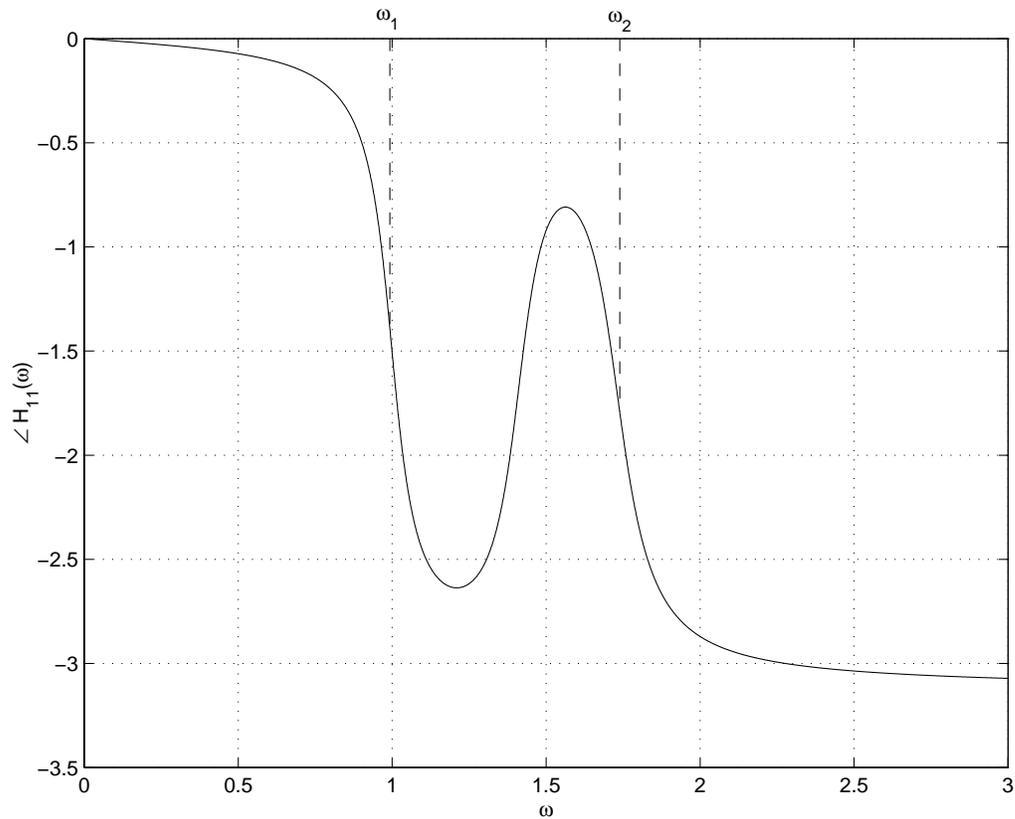
```
> v2:=eiv[2,3,1];
```

$$v2 := [-1, 1]$$

```
> v2n:=v2/norm(v2,2);
```

$$v2n := \frac{1}{2} v2 \sqrt{2}$$

```
> V:=augment(v1n,v2n);
```

Abbildung 6.8: Phasengang  $H_{11}$ 

$$V := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> VT:=transpose(V);

$$VT := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> Delta:=multiply(VT,C,V);

$$\Delta := \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{7}{40} \end{bmatrix}$$

> Lambda:=multiply(VT,K,V);

$$\Lambda := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> zeta[1]:=Delta[1,1]/sqrt(Lambda[1,1])/2;

$$\zeta_1 := \frac{1}{16}$$

> zeta[2]:=Delta[2,2]/sqrt(Lambda[2,2])/2;

$$\zeta_2 := \frac{7}{240} \sqrt{3}$$

Betrag und Argument von  $H_{11}$  und  $H_{21}$  sind in den Abbildungen 6.7, 6.8, 6.9 und 6.10 dargestellt und werden in `Matlab` nachbearbeitet.

6.3.2.3.1 Eigenfrequenz und Dämpfung Aus den Abb. 6.7 und 6.8 werden folgende Werte entnommen und berechnet:

$\omega_1$	$\omega_{11}$	$\omega_{12}$	$ H_{11}(\omega_1) $	$Q_2(\omega_1)$	$\angle H_{11}(\omega_1)$	$\zeta_1$
0.9924	0.9235	1.0500	4.0591	2.8702	$-90^\circ$	0.0637
$\omega_2$	$\omega_{21}$	$\omega_{22}$	$ H_{11}(\omega_2) $	$Q_2(\omega_2)$	$\angle H_{11}(\omega_2)$	$\zeta_2$
1.7394	1.6619	1.8349	1.7005	1.2024	$-90^\circ$	0.0497

Tabelle 6.1: Systemparameter

Die abgelesenen und berechneten Werte, u.a. Gl. (6.3.16),  $\omega_i$  und  $\zeta_i$  stimmen gut mit den theoretischen  $\omega_i = \{1, \sqrt{3}\}$  und  $\zeta_i = \{1/16, 7\sqrt{3}/240\}$  überein.

Aufgabe 27 Stellen Sie aus den Abb. 6.9 und 6.10 eine zu Tab. 6.1 analoge Tabelle zusammen und bestätigen Sie die vorhandenen und ergänzen Sie die noch fehlenden Werte des Beispiels.

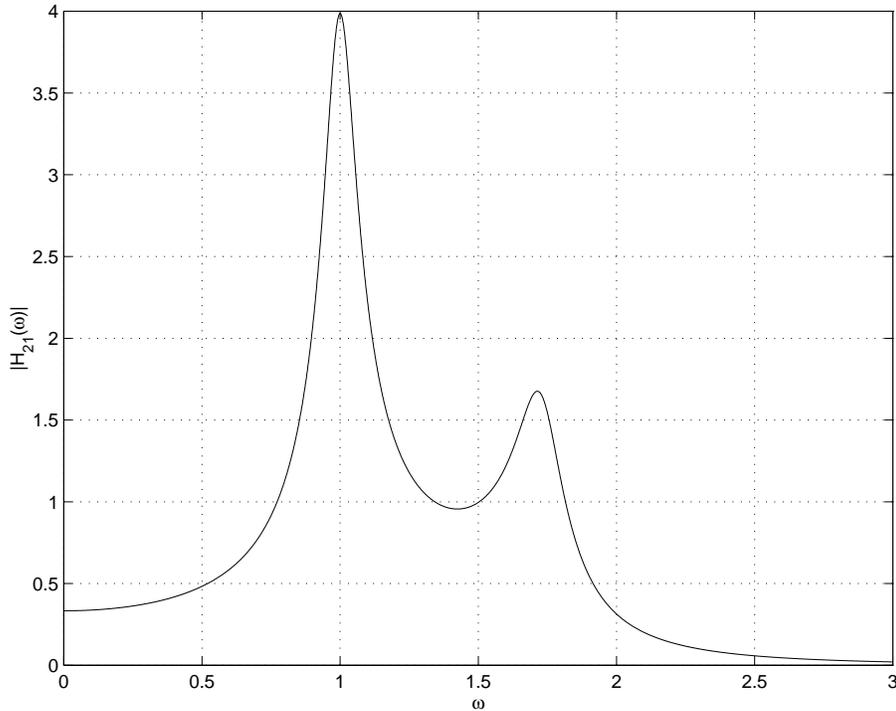
□

6.3.2.3.2 Eigenvektoren Die zur Bestimmung der Eigenvektoren notwendigen Daten werden aus den Abb. 6.7, 6.8, 6.9 und 6.10 extrahiert und sind in Tab. 6.2 eingetragen. Daraus berechnen Sie mit Gl. (6.3.25) und (6.3.26)

$ H_{11}(\omega_1) $	$\angle H_{11}(\omega_1)$	$ H_{11}(\omega_2) $	$\angle H_{11}(\omega_2)$
4.05906	$-90^\circ$	1.70051	$-90^\circ$
$ H_{21}(\omega_1) $	$\angle H_{21}(\omega_1)$	$ H_{21}(\omega_2) $	$\angle H_{21}(\omega_2)$
3.98602	$-90^\circ$	1.67596	$+90^\circ$

Tabelle 6.2: Maxima des Amplitudengangs

$$\mathbf{u}_1 = (0.7111, 0.7089)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_2 = (-0.7803, 0.7465)^T,$$

Abbildung 6.9: Amplitudengang  $H_{21}$ 

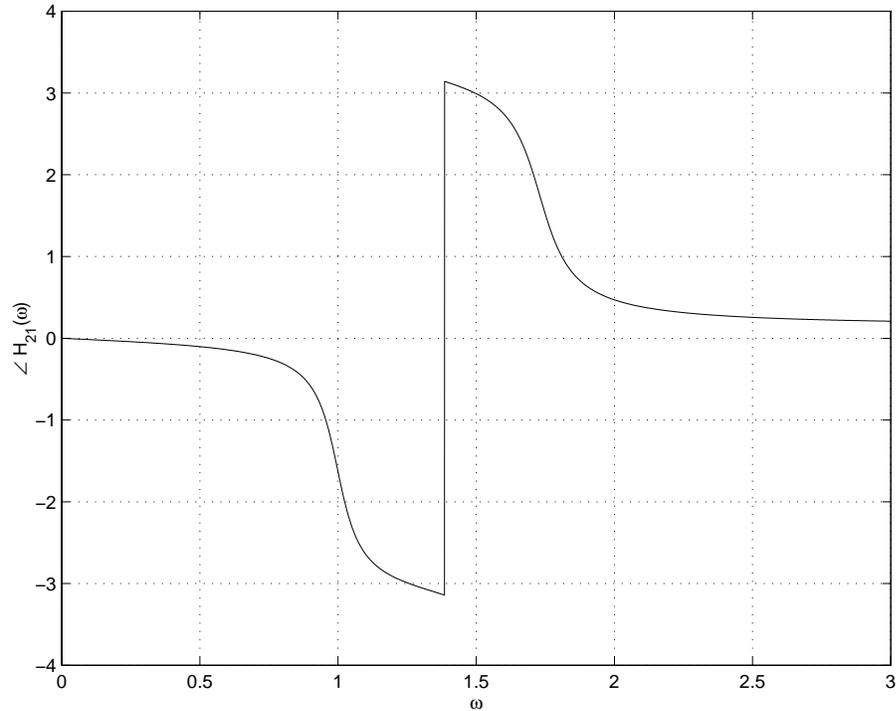
wobei die Vorzeichen nach Gl. (6.3.27) gefunden werden. Das Ergebnis ist in guter Übereinstimmung mit den exakten theoretischen Werten des Maple-Worksheet.

Übung 23 Schreiben Sie eine *Matlab*-Prozedur zur experimentellen Modalanalyse. Ein Entwurf ist in den folgenden Zeilen beispielhaft abgebildet.

```

1  global F
   x=0:0.001:3;
   h11=-16*(40-20*x.^2+3*i*x)./(-960+1287*x.^2-176*i*x-320*x.^4+96*i*x.^3);
   h21=-8*(40+i*x)./(-960+1287*x.^2-176*i*x-320*x.^4+96*i*x.^3);
5  %Eigenwert 1, Daempfung 1
   x1=fmin('h',sqrt(1)-1/6,sqrt(1)+1/6,[1,1e-8,1e-8])
   F=-h(x1)/sqrt(2)
   x11=fzero('h11',x1-1/10)
   x21=fzero('h11',x1+1/10)
10 zeta1=(x21-x11)/2/x1
   y=0:0.01:x21;
   z=F*ones(length(y),1);
   y0=0:0.01:x1;
   z0=-h(x1)*ones(length(y0),1);
15 y1=0:0.01:-h(x11);
   z1=x11*ones(length(y1),1);

```

Abbildung 6.10: Phasengang  $H_{21}$ 

```

y2=0:0.01:-h(x21);
z2=x21*ones(length(y2),1);
%Eigenwert 2, Daempfung 2
20 x2=fmin('h',sqrt(3)-1/6,sqrt(3)+1/6,[1,1e-8,1e-8])
F=-h(x2)/sqrt(2)
x12=fzero('h11',x2-1/10)
x22=fzero('h11',x2+1/10)
zeta2=(x22-x12)/2/x2
25 plot(x,abs(h11));grid;
xlabel('\omega');
ylabel('|H_{11}(\omega)|');
hold on
plot(y,z,'--');plot(y0,z0,'--');
30 plot(z1,y1,'--');plot(z2,y2,'--');
%gtext('Q');gtext('Q_2=2^{-1/2}Q');
%gtext('\omega_{11}');gtext('\omega_{12}');
hold off
pause
35 y1=0:-0.01:h12(x1);
y2=0:-0.01:h12(x2);
z1=x1*ones(length(y1),1);

```

```

z2=x2*ones(length(y2),1);
plot(x,angle(h11));grid;
40 xlabel('\omega');
ylabel('\angle H_{11}(\omega)');
hold on
plot(z1,y1,'--');
plot(z2,y2,'--');
45 %gtext('\omega_1');gtext('\omega_2');
hold off
pause
plot(x,abs(h21));grid;
xlabel('\omega');
50 ylabel('|H_{21}(\omega)|');
pause
plot(x,angle(h21));grid;
xlabel('\omega');
ylabel('\angle H_{21}(\omega)');
55 pause
%Probe der Daempfung
xg1=fmin('g',sqrt(1)-1/6,sqrt(1)+1/6,[1,1e-8,1e-8])
xg2=fmin('g',sqrt(3)-1/6,sqrt(3)+1/6,[1,1e-8,1e-8])
F=-g(xg1)/sqrt(2)
60 x11=fzero('h22',xg1-1/10)
x21=fzero('h22',xg1+1/10)
zeta1=(x21-x11)/2/xg1
F=-g(xg2)/sqrt(2)
x12=fzero('h22',xg2-1/10)
65 x22=fzero('h22',xg2+1/10)
zeta2=(x22-x12)/2/xg2
%Betraege der Eigenvektoren
a1a1=-2*zeta1*h(x1)*x1^2
a1a2=-2*zeta1*g(xg1)*xg1^2
70 u11=sqrt(a1a1)
u12=a1a2/u11
a11=-2*zeta2*h(x2)*x2^2
a12=-2*zeta2*g(xg2)*xg2^2
u21=sqrt(a11)
75 u22=a12/u21

function y=h(x)
y=-abs(-16*(40-20*x.^2+3*i*x)./(-960+1287*x.^2-176*i*x-320*x.^4+96*i*x.^3));

80 function y=h11(x)
global F
y=abs(-16*(40-20*x.^2+3*i*x)./(-960+1287*x.^2-176*i*x-320*x.^4+96*i*x.^3))-F;

```

---

```
function y=h12(x)
85  y=angle(-16*(40-20*x.^2+3*i*x)./(-960+1287*x.^2-176*i*x-320*x.^4+96*i*x.^3));
```

*Wenn Sie die Student-Edition von **Matlab** besitzen, dann ist eine symbolisch-numerische Lösung durch Zugriff auf den **Maple**-Kern optimal.*

□

---

# Anhang A

## Integral-Transformationen

### A.1 Fourier-Transformation

Periodische Bewegungen, z.B. eine Sägezahn-Bewegung, lassen sich durch Entwicklung in Fourier-Reihen<sup>1</sup> durch harmonische Bewegungen approximieren.

#### A.1.1 Fourier-Reihen

Es sei die periodische Funktion  $x(t)$  gegeben; ihre Fourier-Entwicklung ist:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (\text{A.1.1})$$

mit der Periode  $T$  und der Grundfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  heißen Fourier-Koeffizienten, und sie werden folgendermaßen berechnet:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (\text{A.1.2a})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt, \quad (\text{A.1.2b})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt. \quad (\text{A.1.2c})$$

Diese einfachen Beziehungen erhält man durch Multiplikation von Gl. (A.1.1) mit  $\cos n\omega t$  bzw.  $\sin n\omega t$  und Integration über eine Periode  $T$ .

*Aufgabe 28 Führen Sie die Schritte im einzelnen selbst durch!*

□

---

<sup>1</sup>Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), französischer Mathematiker und Physiker, bedeutende Beiträge zur Thermodynamik und zu den Differentialgleichungen der Physik.

### A.1.2 Diskrete Fourier-Transformation

Wenn die Funktion  $x(t)$  mit der Periode  $T$  zu  $N$  diskreten Zeitpunkten  $t_k$  als  $x_k$  gemessen wurde, dann läßt sie sich als diskrete Fourier-Transformation darstellen:

$$x(t_k) = x_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N/2} \left( a_i \cos \frac{2\pi i t_k}{T} + b_i \sin \frac{2\pi i t_k}{T} \right), \quad k = 1, \dots, N. \quad (\text{A.1.3})$$

Hier berechnen sich die diskreten Fourier-Koeffizienten wie folgt:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k, \quad (\text{A.1.4a})$$

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \cos \frac{2\pi i k}{N}, \quad (\text{A.1.4b})$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \sin \frac{2\pi i k}{N}. \quad (\text{A.1.4c})$$

### A.1.3 Fenster-Funktionen

Wenn die Abtastung des Signals nicht bei ganzzahligen Vielfachen der Periode  $T$  erfolgt, kommt es zu Verfälschungen der Fourier-Approximation, da dann eine Funktion mit einer veränderten Periode zugrunde liegt. Um diesen Effekt abzuschwächen, wird das Signal mit einer Gewichtungsfunktion bewertet, die die Ränder des Abtastintervalls gering gewichtet. Man spricht von einer Bewertung mit einer Fenster-Funktion.<sup>2</sup> Eine häufig verwendete Fenster-Funktion ist die Hanning-Funktion:

$$w(k) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{k}{n+1} \right) \right], \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.1.5})$$

### A.1.4 Eigenschaften und Berechnung

Alternative Darstellung: Fourier-Reihen können als Sinus- oder Cosinus-Terme alleine beschrieben werden, z.B.

$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega t - \phi_n),$$

mit

$$d_0 = a_0/2, \quad (\text{A.1.6a})$$

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (\text{A.1.6b})$$

$$\phi_n = \arctan \left( \frac{b_n}{a_n} \right). \quad (\text{A.1.6c})$$

<sup>2</sup>Englisch: Windowing.

Gerade Funktionen genügen der Bedingung  $x(-t) = x(t)$ ; für diese fallen die Sinus-Terme der Fourier-Entwicklung weg, und es bleibt

Gerade und ungerade Funktionen:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t.$$

Für ungerade Funktionen gilt  $x(-t) = -x(t)$ , und in diesem Fall gilt

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n) \sin n\omega t.$$

Die harmonischen Funktionen  $a_n \cos(n\omega t)$  und  $b_n \sin(n\omega t)$  sind die harmonischen Anteile der Ordnung  $n$  der periodischen Funktion  $x(t)$ . Die Koeffizienten der Gln. (A.1.2) und (A.1.6a) können als vertikale Linien über den zu ihnen gehörenden Frequenzen  $n\omega$  aufgetragen werden und bilden dann das (diskrete) Frequenzspektrum der Funktion  $x(t)$ . Auf diese Weise kann jede Funktion im Zeitbereich als  $x(t)$  oder im Frequenzbereich als z.B.  $a_n(n\omega)$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ , dargestellt werden. Beide Darstellungsweisen haben je von Fall zu Fall ihre Vorteile[29].

Frequenz-Spektrum:

Zur numerischen Berechnung der Koeffizienten in Gl. (A.1.2) wird die schnelle Fourier-Transformation<sup>3</sup> von Cooley und Tuckey[29] verwendet. Dazu wird das Gleichungssystem (A.1.4) in Matrix-Vektor-Darstellung

Numerische Berechnung:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{x}$$

umformuliert, mit  $\mathbf{x}$  dem Vektor mit den Komponenten  $x_k$  der abgetasteten diskreten Funktionswerte,  $\mathbf{a}$  dem Vektor der zu berechnenden Fourier-Koeffizienten  $a_0, a_n, b_n$  und  $\mathbf{A}$  der Koeffizientenmatrix mit den Eingängen  $\cos 2\pi i t_k / T$  und  $\sin 2\pi i t_k / T$ . Der Algorithmus von Cooley und Tuckey beinhaltet eine effiziente Inversion der Koeffizientenmatrix zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}.$$

### A.1.5 Beispiel

Gegeben sei die Dreieckswelle mit der Periode  $T$ :

$$f(t) = \begin{cases} 4t/T - 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T/2 \\ 1 - 4(t - T/2)/T & \text{für } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Der Fourier-Koeffizient  $a_0$  wird aus Gl. (A.1.2) berechnet:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (4t/T - 1) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T [1 - 4(t - T/2)/T] dt = 0,$$

<sup>3</sup>Englisch: Fast Fourier Transform (FFT).

die Fourier-Koeffizienten  $a_n$  werden aus Gl. (A.1.2b) gewonnen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (4t/T - 1) \cos n\omega_T t dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T [1 - 4(t - T/2)/T] \cos n\omega_T t dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} & \text{für ungerade } n \end{cases} \end{aligned}$$

Die Integration aller  $b_n$  gemäß Gl. (A.1.2c) ergibt immer Null. Damit läßt sich die Dreieckswelle folgendermaßen approximieren:

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{9} \cos \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{25} \cos \frac{10\pi}{T} t + \dots \right). \quad (\text{A.1.7})$$

Übung 24 Überprüfen Sie die Approximationsgüte der Gl. (A.1.7) indem Sie sukzessive die Summanden addieren. Benützen Sie *Matlab* oder *Gnuplot* oder ein ähnliches Ihnen verfügbares Programm.

## A.2 Laplace-Transformation

### A.2.1 Definition

Die Laplace-Transformation<sup>4</sup> gehört zu den Integraltransformationen vom Typ

$$F(s) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)K(s;t)dt,$$

die eine im Zeitbereich gegebene Funktion  $f(t)$  in die Funktion  $F(s)$  im Bildbereich transformiert, der durch die komplexe Variable  $s = \sigma + j\omega$  charakterisiert ist.

Lineare, zeitinvariante Differentialgleichungen lassen sich durch Integral-Transformationen in rationale Funktionen ‘algebraisieren’ und lösen, wenn als Kern der Transformation

$$K(s;t) = e^{-st}$$

gewählt und die Integrationsgrenzen  $t_0 = 0$  und  $t_1 = \infty$  gewählt werden:

Regel 2

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.}$$

$\mathcal{L}[f(t)]$  heißt *Laplace-Transformation*. Die Rücktransformation vom Bildbereich in den Zeitbereich geschieht durch die *inverse Laplace-Transformation*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds.$$

□

<sup>4</sup>Pierre Simon de Laplace (1749–1827), französischer Mathematiker, wichtige Beiträge zur Potentialtheorie, zur Mechanik, Astronomie und Wahrscheinlichkeitslehre.

Die Zuordnung  $f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s)$  wird als Korrespondenz der Laplace-Transformation bezeichnet. Für diese Korrespondenzen stehen Tafeln zur Verfügung; eine einfache, für dieses Skriptum, die Übungen und die Prüfung ausreichende ist in Tabelle A.1 zusammengefaßt. Ausführlichere Korrespondenzentabellen finden Sie z.B. in [13].

Wenn möglich werden die Originalfunktionen mit kleinen Buchstaben, ihre korrespondierenden Laplace-transformierten Funktionen mit den entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet, z.B.  $f(t) \Leftrightarrow F(s)$ ,  $y(x) \Leftrightarrow Y(s)$ . Wenn Funktionen im Zeitbereich schon großen Buchstaben zugeordnet sind, dann bleiben sie im Frequenzbereich großgeschrieben und erhalten zur Unterscheidung ein Dach, z.B.  $f(t) \Leftrightarrow \hat{F}(s)$ .

Beispiel 28 Sei  $f(t) = 1$  für  $t \geq 0$  gegeben. Bestimmen Sie  $F(s)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1] &= \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

□

Tabelle A.1: Laplace-Korrespondenzen

No	$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	$F(s)$	$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
2	$sF(s) - f(0)$	$\frac{d}{dt} f(t)$
3	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$
4	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - f^{(n-1)}(0)$	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$
5	$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$
6	$F(s - a)$	$e^{at} f(t)$
7	$e^{-as} F(s)$	$\sigma(t - a) f(t - a)$
8	$F(s) * G(s)$	$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau$

Tabelle A.1: Laplace-Korrespondenzen

9	1	$\delta(t)$
10	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\sigma(t - a)$
11	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$
12	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$
13	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$
14	$\frac{1}{(s + a)^n}$	$\frac{1}{(n - 1)!} t^{n-1} e^{-at}$
15	$\frac{a}{s(s + a)}$	$1 - e^{-at}$
16	$\frac{s}{(s + a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$
17	$\frac{1}{s(s + a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$
18	$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}$
19	$\frac{s + c}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{(c - a)e^{-at} - (c - b)e^{-bt}}{b - a}$
20	$\frac{1}{s(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{ab} \left( 1 - \frac{b}{b - a} e^{-at} + \frac{a}{b - a} e^{-bt} \right)$
21	$\frac{s + c}{s(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{ab} \left( c - \frac{b(c - a)}{b - a} e^{-at} + \frac{a(c - b)}{b - a} e^{-bt} \right)$
22	$\frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{e^{-bt}}{(c - b)(a - b)} + \frac{e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$
23	$\frac{s + d}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{(d - a)e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{(d - b)e^{-bt}}{(c - b)(a - b)} + \frac{(d - c)e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$
24	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
25	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$

Tabelle A.1: Laplace-Korrespondenzen

26	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \sin at$
27	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \cos at$
28	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$
29	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \theta), \quad \theta = \arccos \zeta$
30	$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta), \quad \theta = \arccos \zeta$
31	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta), \quad \theta = \arccos \zeta$
32	$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta), \quad \theta = \arccos \zeta$
33	$\arctan \frac{\omega}{s}$	$\frac{1}{t} \sin \omega t$

In Tabelle A.1 ist  $\sigma(t)$  die Einheitssprungfunktion oder Heaviside-Funktion

Eingangsfunktionen:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ 1 & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

und  $\delta(t)$  der Dirac- oder Einheitsimpuls, der heuristisch als

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t-T)}{T}$$

definiert werden kann. Zusammen mit der Einheitsrampenfunktion  $\rho(t)$

$$\rho(t) = t\sigma(t)$$

und einer Winkelfunktion

$$w(t) = \sigma(t) \sin at$$

sind damit die wichtigsten Systemeingangsfunktionen beschrieben.

## A.2.2 Eigenschaften

Die Laplace-Transformation ist eine lineare Transformation mit folgenden Eigenschaften einer linearen Transformation:

Linearität:

$$\mathcal{L}[kf(t)] = k\mathcal{L}[f(t)]$$

für konstantes  $k$  und

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)].$$

Diese Eigenschaft folgt sofort aus der Definition der Regel 2.

Aufgabe 29 Versuchen Sie den Beweis; das ist eine gute Übung zum Umgang mit Regel 2.

□

Weitere Eigenschaften sind zusammengefaßt in folgendem

Satz 1

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k}{dt^k}f(0_+), \quad (\text{A.2.1})$$

$$\text{speziell für } n = 1: \quad \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0_+),$$

mit  $\frac{d^k}{dt^k}f(0_+)$  dem entsprechenden rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle  $t = 0$ .

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (\text{A.2.3})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad (\text{A.2.4})$$

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s), \quad (\text{A.2.5})$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a), \quad (\text{A.2.6})$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau. \quad (\text{A.2.7})$$

Bemerkung: Die erste Eigenschaft (A.2.1) des Satzes bildet die Grundlage zur Algebraisierung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Eigenschaften (A.2.3) und (A.2.4) bilden die sogenannten Grenzwertsätze. Die Eigenschaft (A.2.5) zeigt, daß auch Systeme mit Totzeit  $t_0$  mit der Laplace-Transformation behandelt werden können. Die letzte Eigenschaft (A.2.7) wird als Faltungseigenschaft bezeichnet.

Beweis: Hier sollen als Beispiele für die Anwendung der Regel 2 einige Aussagen des Satzes 1 bewiesen werden.

a) Differentiation, Gl. (A.2.1): Als Werkzeug aus der Integralrechnung wird die partielle Integration verwendet[6].

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt \\ &= e^{-st}f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= -f(0) + sF(s). \end{aligned}$$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$  wird bewiesen durch Ersetzen von  $f'(t)$  durch  $f''(t)$  in der o.a. Gleichungskette, der allgemeine Beweis von Gl. (A.2.1) geschieht durch Induktion. (Versuchen Sie es als Wiederholung der Grundvorlesung Mathematik!)

b) Verschiebung der  $t$ -Achse, Gl. (A.2.5): Zunächst soll gezeigt werden, daß mit der Heaviside-Funktion  $\sigma(\tau)$  folgendes gilt:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t - t_0)f(t - t_0)\} = e^{-t_0s}F(s). \quad (\text{A.2.8})$$

Für  $t_0 \geq 0$  sei  $\tilde{f}(t)$  wie folgt definiert:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ f(t - t_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

oder mit der Heaviside-Funktion

$$\tilde{f}(t) = \sigma(t - t_0)f(t - t_0).$$

Dann gilt  $\mathcal{L}\{\tilde{f}\} = e^{-t_0s}F(s)$ , wobei  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  ist, und damit ist die Beziehung (A.2.8) hergeleitet.

Nun ist

$$\begin{aligned} e^{-t_0s}F(s) &= e^{-t_0s} \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^\infty e^{-s(t_0+\tau)}f(\tau)d\tau; \end{aligned}$$

nun wird  $t_0 + \tau$  durch  $t$  substituiert, d.h.  $\tau = t - t_0$  in o.a. Gleichung eingesetzt und die Gleichungskette weitergeführt:

$$\begin{aligned} e^{-t_0s}F(s) &= \int_{t=t_0}^\infty e^{-st}f(t - t_0)dt \\ &= \int_{t=0}^\infty e^{-st}f(t - t_0)\sigma(t - t_0)dt, \end{aligned}$$

womit mit Gl. (A.2.8) der Beweis erbracht ist.

c) Verschiebung der  $s$ -Achse, Gl. (A.2.6): Es gilt nach Definition der Laplace-Transformation

$$F(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

und damit unter Ersetzen von  $s$  durch  $s - a$

$$\begin{aligned} F(s - a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}. \end{aligned}$$

d) Faltungsintegral, Gl. (A.2.7): Die Definition von  $F_2(s)$  und Gl. (A.2.5) führen auf

$$e^{-s\tau}F_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f_2(t-\tau)\sigma(t-\tau)dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st}f_2(t-\tau)dt.$$

Dies und die Definition von  $F_1(s)$  ergeben:

$$\begin{aligned} F_1(s)F_2(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau}f_1(\tau)F_2(s)d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) \int_{\tau}^{\infty} e^{-st}f_2(t-\tau)dt d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau dt, \end{aligned}$$

und damit das behauptete Resultat. □

Beispiel 29 Gegeben sei  $f(t) = \cos \omega t$ , gesucht  $F(s)$ .

Es gilt  $f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 f(t)$  und  $f(0) = 1$  und  $f'(0) = 0$  und damit

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{f''(t)\} \\ &= s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - s \\ \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Wiederholen Sie dieses Beispiel für  $f(t) = \sin \omega t$ . □

Daß Sie auf mehreren Wegen zum Ziel gelangen können, zeigt das folgende

Beispiel 30 Es ist mit Zeile 13 aus Tab. A.1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} &= \frac{1}{s - j\omega} \\ &= \frac{s + j\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Andererseits ist mit der Euler-Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} &= \mathcal{L}\{\cos \omega t + j \sin \omega t\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos \omega t\} + j \mathcal{L}\{\sin \omega t\}, \end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleich

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

ergibt. □

Für die Faltungsoperation (A.2.7)

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \quad (\text{A.2.9})$$

gelten das Kommutativ-, das Distributiv- und das Assoziativ-Gesetz; außerdem ist  $0 * f = f * 0 = 0$ , aber i.a.

$$1 * f \neq f.$$

Übung 25 Finden Sie ein Beispiel für letztere Behauptung.

□

## A.3 Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen  $P(s)/Q(s)$ , mit  $P(s)$  und  $Q(s)$  als Polynomen beliebiger Ordnung, werden nicht immer in Korrespondenztabelle zu finden sein. Um von ihnen die inverse Laplace-Transformation bilden zu können, erweist sich die *Partialbruchzerlegung* als wichtiges Hilfsmittel. Es sei

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0},$$

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m < n$  gesetzt werden darf. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann  $Q(s)$  in seine Nullstellen  $s_i$  faktorisiert werden:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = (s - s_1)(s - s_2) \times \dots \times (s - s_n).$$

Nun läßt sich  $F(s)$  in die Summe seiner Partialbrüche

$$F(s) = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} + \dots + \frac{k_n}{s - s_n}$$

zerlegen, wobei das Vorgehen durch den Typ der Nullstellen bestimmt wird.

### A.3.1 Reelle Nullstellen

#### A.3.1.1 Einfache Nullstellen

Die Koeffizienten  $k_j$  für einfache *reelle Nullstellen*  $s_j$  werden wie folgt berechnet

$$k_j = (s - s_j)F(s)|_{s=s_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$



### A.3.1.2 Mehrfache Nullstellen

Im Falle mehrfacher *reeller Nullstellen* des Nenners,  $(s - s_j)^q$ ,

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - s_1)(s - s_j)^q} = \frac{k_l}{s - s_1} + \frac{k_{j1}}{s - s_j} + \frac{k_{j2}}{(s - s_j)^2} + \dots + \frac{k_{jq}}{(s - s_j)^q}$$

werden die Partialbruch-Koeffizienten aus der Beziehung

$$k_{jr} = \frac{1}{(q - r)!} \left. \frac{d^{q-r}}{ds^{q-r}} [(s - s_j)^q F(s)] \right|_{s=s_j}, \quad r = 1, \dots, q$$

gewonnen.

### A.3.2 Komplexe Nullstellen

Bei einfachen<sup>5</sup> komplexen Polpaaren  $s_i = \alpha + j\beta$  und  $s_{i+1} = \alpha - j\beta$  werden diese zu einem gemeinsamen Bruch zusammengefaßt:

$$F(s) = \frac{k_i(s - \alpha) + k_{i+1}\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + \dots$$

mit den Koeffizienten

$$k_i(s - \alpha) + k_{i+1}\beta \Big|_{s=\alpha+j\beta} = [(s - \alpha)^2 + \beta^2]F(s) \Big|_{s=\alpha+j\beta}.$$

Diese komplexe Gleichung kann durch Vergleich der Realteile und der Imaginärteile nach den beiden Unbekannten  $k_i$  und  $k_{i+1}$  aufgelöst werden. Die inverse Laplace-Transformation des betrachteten ersten Terms von  $F(s)$  ist unter Beachtung der No. 16 und 17 in Tabelle A.1 besonders einfach zu berechnen.

### A.3.3 Beispiele und Übungen

→ A.4

Beispiel 31 *Gegeben sei die Übertragungsfunktion eines dynamischen Systems*

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 1}.$$

*Es soll die Antwort  $y(t)$  des Systems im Zeitbereich auf einen Einheitssprung  $u(t) = \sigma(t)$  als Systemeingang berechnet und deren Graph skizziert werden.*

Lösung: *Für die Übertragungsfunktion eines dynamischen Systems*

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 1}.$$

<sup>5</sup>Mehrfache komplexe Polpaare kommen in der Praxis äußerst selten vor, deshalb wird auf deren Behandlung verzichtet.

und den Einheitsprung  $\mathbf{u}(t) = \sigma(t)$  als Systemeingang, dessen Laplace-Transformierte  $\mathbf{U}(s) = 1/s$  lautet, ist der Systemausgang durch

$$Y(s) = \frac{2s + 3}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{2s + 3}{s(s + 1)^2} \quad (\text{A.3.1})$$

gegeben. Die Nullstellen des Nenners liegen bei  $s_1 = 0$  und  $s_2 = -1$ ; letztere tritt zweifach auf, da ihr Exponent Zwei ist.

Die Sprungantwort im Zeitbereich erhält man durch inverse Laplace-Transformation, deren einfachere Berechnung durch Partialbruch-Zerlegung

von Gleichung (A.3.1) vorbereitet wird:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 3}{s(s + 1)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_{21}}{s + 1} + \frac{k_{22}}{(s + 1)^2} \\ &= \frac{(k_1 + k_{21})s^2 + (2k_1 + k_{21} + k_{22})s + k_1}{s(s + 1)^2}. \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von  $s$  auf der rechten und linken Seite führt auf folgendes lineares Gleichungssystem:

Algebraische Methode:

$$\begin{aligned} k_1 + k_{21} &= 0, \\ 2k_1 + k_{21} + k_{22} &= 2, \\ k_1 &= 3, \end{aligned}$$

und damit zu  $k_1 = 3$ ,  $k_{21} = -3$  und  $k_{22} = -1$ .

Das gleiche Ergebnis wird mit der Residuen-Methode<sup>6</sup> erzielt:

Residuen-Methode:

$$k_{ij} = \frac{1}{(l-j)!} \frac{d^{(l-j)}}{ds^{(l-j)}} [(s - s_i)^l Y(s)] \Big|_{s=s_i}, \quad j = 1, \dots, l,$$

hier speziell für  $l = 2$ , da die zweite Nenner-Nullstelle  $s = -1$  zweifach auftritt:

$$\begin{aligned} k_1 &= (s - s_1)Y(s) \Big|_{s=s_1} = \frac{2s + 3}{(s + 1)^2} \Big|_{s=0} = 3, \\ k_{21} &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}} [(s - s_2)^2 Y(s)] \Big|_{s=s_2} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{2s + 3}{s} \right] \Big|_{s=-1} = -3, \\ k_{22} &= \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{(2-2)}}{ds^{(2-2)}} [(s - s_2)^2 Y(s)] \Big|_{s=s_2} = \frac{2s + 3}{s} \Big|_{s=-1} = -1. \end{aligned}$$

Damit ergibt die Partialbruch-Zerlegung

$$Y(s) = \frac{2s + 3}{s(s + 1)^2} = \frac{3}{s} - \frac{3}{s + 1} - \frac{1}{(s + 1)^2},$$

und unter Verwendung der Korrespondenzen-Tabelle wird die Sprungantwort im Zeitbereich

$$\mathbf{y}(t) = 3 - 3e^{-t} - te^{-t}.$$

□

<sup>6</sup>In der Theorie komplexer Funktionen werden die  $k_{ij}$  als Residuen bezeichnet.

Übung 26 Gegeben sei der Ausgang eines dynamischen Systems im Frequenz-Bereich

$$Y(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}.$$

Berechnen Sie dessen Partialbruch-Zerlegung und damit den Ausgang  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$  im Zeitbereich.

□

Übung 27 Wiederholen Sie Aufgabe 26 für folgende Funktion

$$Y(s) = \frac{5}{s(s + 1)^3(s + 2)}.$$

□

## A.4 Algebraisierung linearer Differentialgleichungen

Es sei die lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung vorgelegt

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \\ = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u, \quad m < n, \end{aligned}$$

deren sämtliche Anfangsbedingungen,

$$\frac{d^n y(0)}{dt^n} = 0, \quad \dots \quad y(0) = 0,$$

verschwinden mögen, was wegen der Linearität (Superponierbarkeit) der betrachteten dynamischen Systeme keine Einschränkung bedeutet.

! Anwendung der ersten Eigenschaft des Satzes 1,  $\mathcal{L}[d^i y/dt^i] = s^i Y(s)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , ergibt als Laplace-Transformation der Impulsantwort einer Differentialgleichung deren Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} =: G(s).$$

Der Übergang von der Differentialgleichung zur Übertragungsfunktion ist umkehrbar, d.h. ebenso einfach wie die Übertragungsfunktion aus der Differentialgleichung hergeleitet werden kann, kann die Differentialgleichung aus der Übertragungsfunktion gewonnen werden. Dies zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 32 Ein mechanisches Feder-Masse-System mit Reibung genügt folgender Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + cy = u(t).$$

Satz 1 in aller Allgemeinheit angewendet ergibt deren Laplace-Transformation

$$m[s^2Y(s) - s^1y(0) - s^0\dot{y}(0)] + d[s^1Y(s) - s^0y(0)] + cY(s) = U(s)$$

oder

$$(ms^2 + ds + c)Y(s) = m[y(0)s + \dot{y}(0)] + dy(0) + U(s)$$

oder, mit allen Anfangsbedingungen zu Null gesetzt,

$$(ms^2 + ds + c)Y(s) = U(s)$$

und daraus die Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + ds + c}.$$

□

Beispiel 33 Ein pneumatisches Drossel-Speicher-System hat die Übertragungsfunktion

$$\frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{1}{Ts + 1}.$$

Erweiterung mit dem Nenner der rechten Seite ergibt

$$(Ts + 1)X_a(s) = TsX_a(s) + X_a(s) = X_e(s)$$

und mit der ersten Eigenschaft des Satzes 1

$$T\dot{x}_a(t) + x_a(t) = x_e(t),$$

mit  $x_e(t)$  dem zeitlichen Verlauf des Eingangsdruckes vor der Drossel und  $x_a(t)$  dem zeitlichen Verlauf des Ausgangsdruckes im Kessel. Die Zeitkonstante  $T = RC$  ist das Produkt aus Drosselwiderstand  $R$  und Kesselkapazität  $C$ .

□

Übung 28 Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = 4\sigma(t),$$

mit  $\sigma(t)$  der Einheitssprungfunktion.

Zunächst seien die Anfangswerte  $x(0) = 0$  und  $x'(0) = 0$ . Lösen Sie die Differentialgleichung durch Transformation in den Bildbereich, Partialbruchzerlegung und Rücktransformation in den Zeitbereich.

Nehmen Sie nun  $x(0) = -1$  und  $x'(0) = 3$  an und wiederholen Sie die Aufgabe. Interpretieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

□



# Anhang B

## Matrixalgebra

### B.1 Definitionen

Eine  $m \times n$  Matrix ist eine rechteckige Anordnungen von (ganzen, reellen, komplexen, etc.) Zahlen oder Funktionen:

Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}_{1,n-1} & \mathbf{a}_{1,n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}_{2,n-1} & \mathbf{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m-1,1} & \mathbf{a}_{m-1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}_{m-1,n-1} & \mathbf{a}_{m-1,n} \\ \mathbf{a}_{m,1} & \mathbf{a}_{m,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}_{m,n-1} & \mathbf{a}_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Die einzelnen Zahlen sind die Komponenten, Elemente oder Eingänge der Matrix, das Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte wird mit  $\mathbf{a}_{ij}$  bezeichnet. Gilt  $m = n$ , dann heißt die Matrix quadratisch. Das Tupel  $(m, n)$  wird Dimension der Matrix genannt.

Matrizen mit einer Spalte oder einer Zeile heißen Vektoren, genauer Spalten- bzw. Zeilenvektoren. Im allgemeinen werden Vektoren als Spaltenvektoren angegeben, Zeilenvektoren sind transponierte Spaltenvektoren:  $\mathbf{a}$  ist ein Spaltenvektor,  $\mathbf{a}^T$  ist derselbe Vektor zum Zeilenvektor transponiert. Vektoren sind in aller Regel als Spaltenvektoren notiert; alle Ausnahmen davon sind ausdrücklich erwähnt. Die ganze Zahl  $n$  der Elemente des Vektors heißt Dimension des Vektors.

Vektoren:



Matrizen werden hier und im folgenden in Großbuchstaben und fett geschrieben, Vektoren in Kleinbuchstaben und ebenfalls fett. Komponenten oder Elemente von Vektoren werden normal gedruckt und mit einem Index versehen, z.B.  $x_i$ , Elemente von Matrizen werden ebenfalls normal gedruckt und mit zwei Indizes

Konventionen:

gekennzeichnet, z.B.  $a_{ij}$ , wobei der erste Index der Zeilenindex, der zweite der Spaltenindex ist.

Spezielle Matrizen: Quadratische Matrizen, deren nicht-diagonale Elemente Null sind, heißen Diagonalmatrizen, Diagonalmatrizen, deren Diagonalelemente alle Eins sind, heißen Einheitsmatrizen. Die Einheitsmatrix wird  $\mathbf{I}$  geschrieben. Will man ihre Dimension  $n$  noch angeben, dann indiziert man die Matrix  $\mathbf{I}_n$ .

Eine quadratische Matrix, die durch Spiegelung der oberen rechten Hälfte an der Diagonalen entsteht, heißt symmetrische Matrix.

Beispiel 34 *Folgende Matrix  $A$  erfüllt die Definition und ist damit symmetrisch:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

□

## B.2 Algebraische Operationen

Transponierung: Die Transponierte einer Matrix wird durch Vertauschen von Zeilen und Spalten der Matrix erzeugt. Sie wird durch ein hochgestelltes T nach der Matrix gekennzeichnet. Ein transponierter Spaltenvektor ist ein Zeilenvektor.

Beispiel 35

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 8 & -6 & 17 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 4 \\ -2 & 17 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

□

Addition: Matrizen oder Vektoren gleicher Dimension werden elementweise addiert oder subtrahiert.

Multiplikation mit einem Skalar: Matrizen oder Vektoren werden elementweise mit einer skalaren Größe multipliziert oder dividiert.

Skalarprodukt: Das Skalarprodukt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor gleicher Dimension ist die Summe der elementweisen Produkte der einzelnen Vektorelemente, d.h. explizit

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n.$$

Beispiel 36 *für ein Skalarprodukt:*

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 50.$$

□

Das Produkt einer  $m \times n$  Matrix  $A$  mit einer  $n \times p$  Matrix  $B$  ist eine  $m \times p$  Matrix  $C$ , deren Elemente  $c_{ij}$  die Skalarprodukte der Zeilenvektoren  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  der Matrix  $A$  mit den Spaltenvektoren  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  der Matrix  $B$  sind:

Matrixprodukt:

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Die Anzahl der Spalten von  $A$  muß gleich der Anzahl der Zeilen von  $B$  sein, sonst ist die Matrixmultiplikation nicht definiert.

Beispiel 37 für ein Matrix×Matrix-Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 54 & 69 & 84 \end{pmatrix}$$

□

Es gilt folgendes:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

Aber es gilt im allgemeinen nicht:



$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA},$$

d.h. die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

Die Spur einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  mit der Dimension  $n \times n$  ist die Summe ihrer Diagonalelemente:

Spur:

$$\text{spur}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

### B.3 Iterative Operationen

Die Determinante  $|\mathbf{A}|$  einer Matrix wird auch als  $\det(\mathbf{A})$  bezeichnet. Die zum Element  $a_{ij}$  definierte Unterdeterminante  $A_{ij}$  ist die Determinante der Matrix, die aus der Matrix  $\mathbf{A}$  entsteht, wenn deren  $i$ -te Zeile und  $j$ -te Spalte gestrichen werden. Diese wird auch Minore genannt.

Determinante:

Beispiel 38 Die Unterdeterminante  $A_{13}$  der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{B.3.1}$$

ist

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

□

Für Determinanten gelten folgende Eigenschaften

Eigenschaften

1. Vertauschen von je zwei Zeilen oder Spalten einer Determinante ändert deren Vorzeichen,
2. Sind zwei Zeilen oder Spalten einer Determinante identisch, dann ist ihr Wert Null,
3. Beliebige Zeilen oder Spalten dürfen mit einer Konstanten multipliziert zu einer anderen Zeile oder Spalte addiert werden, ohne daß der Wert der Determinante sich ändert.

Aufgabe 30 Überprüfen Sie an Beispielen obige Eigenschaften.<sup>1</sup>

□

Kofaktor: Der Kofaktor  $c_{ij}$  zum Element  $a_{ij}$  ist definiert als

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Beispiel 39 Die Matrix  $\mathbf{A}$  sei wie im vorangehenden Beispiel (B.3.1), ihr Kofaktor  $c_{13}$  ist

$$c_{13} = (-1)^4 A_{13} = -1.$$

□

Expansion der Determinante: Die Ordnung einer Determinante kann um eine Ordnung reduziert werden, indem man sie um irgendeine Zeile oder Spalte in die Kofaktoren expandiert.

Beispiel 40 Folgende Determinante  $D$  werde um die zweite Spalte expandiert:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -10 - 8 = -18. \end{aligned}$$

□

Adjungierte Matrix: Die zur Matrix  $\mathbf{A}$  adjungierte Matrix  $\text{adj}(\mathbf{A})$  ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren:

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Beispiel 41 Die Matrix  $\mathbf{A}$  sei wieder wie im Beispiel (B.3.1), dann ist deren Adjungierte

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

<sup>1</sup>Sie sind sich bewußt, daß solch ein Überprüfen kein Beweis der Eigenschaften ist!

□

Die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  einer quadratischen Matrix ist, falls sie existiert, die Lösung der Matrixgleichung

Inverse:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}.$$

Damit gilt sofort:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel kann  $\mathbf{A}^{-1}$  berechnet werden:



$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}. \quad (\text{B.3.2})$$

Beispiel 42 Die Matrix  $\mathbf{A}$  sei wieder wie im Beispiel (B.3.1), dann ist deren Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt außerdem folgendes:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{B.3.3})$$

□

Übung 29 Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Welche Bedingung muß an die Koeffizienten  $a_{ij}$  gestellt werden, damit  $\mathbf{A}$  invertierbar ist?

□

Orthogonale Matrizen genügen der Beziehung:

Orthogonale Matrizen:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad (\text{B.3.4})$$

und damit gilt auch folgende einfache Relation zur Ermittlung der Inversen einer orthogonalen Matrix:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T. \quad (\text{B.3.5})$$

Die Eigenwerte  $\lambda$  einer Matrix sind die Lösungen der Polynomgleichung

Eigenwerte:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \quad (\text{B.3.6})$$

Beispiel 43 Die Matrix  $\mathbf{A}$  sei wieder wie im Beispiel (B.3.1):

$$\begin{aligned} & \left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0, \end{aligned}$$

deren Lösungen sind

$$\lambda_1 = 3.7321, \quad \lambda_2 = 2.0000, \quad \lambda_3 = 0.2679.$$

□

Es gelten die Beziehungen

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \text{spur}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

wobei  $\text{spur}(\mathbf{A})$ , die Spur von  $\mathbf{A}$ , die Summe der Diagonalelemente der Matrix  $\mathbf{A}$  ist.

Übung 30 Verifizieren Sie diese Beziehungen für das gerade behandelte Beispiel.

□

Übung 31 Bilden Sie die Eigenwerte der Matrix aus Übung 29.

□

Eigenvektoren: Ein Eigenvektor  $\mathbf{x}$  zum Eigenwert  $\lambda$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  ist durch folgende homogene Gleichung definiert:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.3.7})$$

Eigenwerte und Eigenvektoren sind unerläßliche Hilfsmittel bei der Behandlung von Schwingungsproblemen mit mehreren Freiheitsgraden, s.a. Kap. 3 und Kap. 4.

Rang einer Matrix: Die  $m$ -dimensionalen Vektoren  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  heißen linear abhängig, wenn es Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_n$  gibt, die nicht alle Null sind und die Gleichung

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

erfüllen. Kann diese Gleichung nur durch  $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$  erfüllt werden, dann sind die Vektoren  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  linear unabhängig.

Geometrische Deutung: Linear abhängige Vektoren in der Ebene liegen parallel, im Raum liegen sie in einer Ebene.

Beispiel 44 Die beiden Vektoren  $\mathbf{a}^T = (1 \ 2 \ 3)$  und  $\mathbf{b}^T = (2 \ 4 \ 6)$  sind linear abhängig, da

$$c_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch  $c_1 = 2$  und  $c_2 = -1$  erfüllt wird.

Dagegen sind die beiden Vektoren  $\mathbf{a}^T = (1 \ 2 \ 3)$  und  $\mathbf{b}^T = (2 \ 4 \ 7)$  linear unabhängig.

□

Übung 32 Überlegen Sie sich, warum der Nullvektor  $(0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$  von jedem Vektor  $\mathbf{a}$  linear abhängig ist.

□

Eine  $m \times n$ -Matrix hat den vollen oder maximalen Rang  $\min(m, n)$ , wenn  $\min(m, n)$  Spalten oder Zeilen in ihr linear unabhängig sind.



Beispiel 45 Die  $3 \times 2$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

hat den Rang  $\min(3, 2) = 2$ , die  $2 \times 3$ -Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

dagegen nur den Rang  $1 \neq \min(3, 2)$ .

□

Quadratische Matrizen  $\mathbf{A}$ , mit  $\dim(\mathbf{A}) = n$ , haben genau dann vollen Rang  $n$ , wenn ihre Determinante nicht verschwindet

$$|\mathbf{A}| \neq 0.$$

Übung 33 Hat die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

vollen Rang?

□

Eine quadratische Matrix, deren Determinante Null ist, heißt singuläre Matrix.

Singuläre Matrix:

Wichtige Literatur zur Matrix-Algebra bilden die Monographien von Golub und Van Loan[21] und Stewart[44]. In der Maschinendynamik sind die Matrizen i.A. symmetrisch; dadurch spezialisiert sich das Eigenproblem auf das symmetrische. Das Standardwerk dazu hat Parlett[38] verfaßt.



# Anhang C

## Linearisierung

### C.1 Taylor-Entwicklung

Analyse- und Syntheseverfahren für dynamische Systeme sind am weitesten für lineare Systeme entwickelt. Dagegen sind fast alle physikalischen, technischen, ökonomischen und sozialen Prozesse nichtlinear und werden durch Differentialgleichungen folgender allgemeiner autonomer<sup>1</sup> Struktur beschrieben

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (\text{C.1.1})$$

Für die Untersuchung mit unseren Methoden muß diese Gleichung linearisiert werden.

Dazu wird eine nominale Lösung  $\mathbf{x}^0(t)$  von (C.1.1) betrachtet, die durch den Eingang  $\mathbf{u}^0(t)$  und eine gewisse Anfangsbedingung  $\mathbf{x}_0(t)$  erzeugt worden ist. Um diese nominale Lösung werde die  $i$ -te Komponente der Differentialgleichung (C.1.1) in eine Taylor-Reihe bis zum ersten Glied entwickelt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) &+ \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} (x_j - x_j^0) \\ &+ \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} (u_j - u_j^0), \\ &i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Nun seien

$$\Delta x_i = x_i - x_i^0$$

und

$$\Delta u_i = u_i - u_i^0,$$

---

<sup>1</sup>Ein System wird nicht-autonom genannt, wenn in den rechten Seiten der Differentialgleichungen die Zeit  $t$  explizit auftritt:  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ .

und daher

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_i^0.$$

Es gilt

$$\dot{\mathbf{x}}_i^0 = f_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0),$$

und damit kann Gleichung (C.1.2) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \Delta x_j(t) + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \Delta u_j(t),$$

oder als Vektorgleichung für das gesamte System:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}. \quad (\text{C.1.2})$$

## C.2 Standard-Form

Wenn man jetzt (der einfacheren Schreibweise wegen) folgende Umdefinitionen vornimmt  $\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}$  und  $\Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}$ , dann erhält man die Standardform der Zustandsdarstellung dynamischer Systeme:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (\text{C.2.1})$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  beinhalten die partiellen Ableitungen der Funktionen  $f_i$  nach den Zustandsvariablen  $x_j$  bzw. den Eingangsvariablen  $u_j$  in den Punkten  $\mathbf{x}^0$  und  $\mathbf{u}^0$ . Sie sind die Jacobi-Matrizen des Systems und werden wie folgt gebildet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2a})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2b})$$

Da die Taylor-Entwicklung nur in einer Umgebung von  $\mathbf{x}^0$  und  $\mathbf{u}^0$  gültig ist, müssen A und B für weiter von  $\mathbf{x}^0$  und  $\mathbf{u}^0$  entfernt liegende Punkte neu ermittelt werden; A und B sind dann nicht mehr konstant, sondern variieren mit der Zeit.

### C.3 Beispiele und Übungen

Beispiel 46 Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{u},$$

deren nichtlineare Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 =: f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 - x_2 + \mathbf{u} =: f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}),\end{aligned}$$

lautet.

Die Jacobi-Matrizen werden als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x_2 & -x_1 - 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnet, und mit  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0 \ x_2^0)^T$  als Nominallösung erhält man folgende lineare Zustandsgleichungen in den Variablen  $\Delta\mathbf{x}$  und  $\Delta\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2, \\ \Delta\dot{x}_2 &= -x_2^0\Delta x_1 - (x_1^0 + 1)\Delta x_2 + \Delta\mathbf{u},\end{aligned}\tag{C.3.1}$$

und für  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0 \ x_2^0)^T = (1 \ 1)^T$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2, \\ \Delta\dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta\mathbf{u}.\end{aligned}$$

□

Beachten Sie, daß die linearen Terme der nichtlinearen Darstellung unverändert in die lineare Darstellung übergehen. Dies ist plausibel, da die Linearisierung der linearen Darstellung an dieser nichts ändern soll.

Übung 34 Untersuchen Sie den Fehler in Beispiel 46, wenn die Linearisierung für

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2,$$

gültig sein soll.

*Hinweis: Vergleichen Sie für extreme  $\mathbf{x}$  die lineare mit der nichtlinearen Zustandsdarstellung.*

□

Beispiel 47 *Betrachten sie folgendes lineare System*

$$\dot{x}_1 = x_2 =: f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{u} =: f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

*Es werde folgendes nichtlineare Regelgesetz*

$$\mathbf{u} = (1 - e^{K|x_1|})\text{sign}(x_1),$$

*mit der Vorzeichenfunktion*

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} +1 & \text{if } z > 0 \\ -1 & \text{if } z < 0 \end{cases},$$

*angewendet. Damit ergibt sich folgende linearisierte Zustandsdarstellung*

$$\Delta \dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 = \Delta x_2,$$

$$\Delta \dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 = K e^{-K|x_1^0|} \Delta x_1,$$

*oder in Matrixdarstellung*

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix},$$

*mit  $a = K e^{-K|x_1^0|} = \text{const.}$  für konstantes  $x_1^0$ .*

*Für  $x_1^0 = 0$  ergibt sich  $a = K$  und für sehr großes  $x_1^0$  strebt  $a \rightarrow 0$ . Im ersten Fall ist  $\Delta \dot{x}_2 = K \Delta x_1$ , im zweiten bleibt  $\Delta x_2$  praktisch konstant.*

□

Übung 35 *Gegeben sei das nichtlineare System*

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{x_2},$$

$$\dot{x}_2 = u x_1.$$

a) *Bilden sie die linearisierte Zustandsdarstellung zunächst allgemein für beliebiges  $x_1^0$ ,  $x_2^0$  und  $u^0$ .*

b) *Nun nehmen Sie  $u^0(t) = 0$  und  $x_1^0(t_0) = x_2^0(t_0) = 1$  an. Zeigen Sie, daß für diesen Eingang und mit diesen Anfangsbedingungen die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} x_1^0(t) &= 1 - t, \\ x_2^0(t) &= 1, \end{aligned}$$

ist.

c) Bilden Sie für diese  $\mathbf{x}^0(\mathbf{t})$  und  $\mathbf{u}^0(\mathbf{t})$  die Jacobi-Matrizen. Hier tritt die Zeit explizit auf!

□



# Anhang D

## Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

In wenigen Fällen gering komplexer Systeme niedriger Ordnung werden die Zustandsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{D.1a})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (\text{D.1b})$$

analytisch und exakt gelöst werden. In aller Regel werden die Lösungen mit dem Computer numerisch und approximativ gefunden.

Wir werden auch den ersten Weg nicht vernachlässigen, da er Einsicht in die Lösungsstruktur vermittelt. Für den zweiten Weg werden wir auch Computer-Prozeduren angeben.

### D.1 Analytische Lösung

#### D.1.1 Lösung im Frequenzbereich

Es sei eine Zeile  $i$  der Gleichung (D.1a) und eine Zeile  $j$  der Gleichung (D.1b) herausgegriffen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= a_{i1}x_1(t) + \cdots + a_{in}x_n(t) + b_{i1}u_1(t) + \cdots + b_{im}u_m(t), \\ x_i(t_0) &= x_{i_0}, \end{aligned} \quad (\text{D.1a})$$

$$y_j(t) = c_{j1}x_1(t) + \cdots + c_{jn}x_n(t), \quad (\text{D.1b})$$

mit  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $b_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$  und  $c_{jk}$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $k = 1, \dots, n$  den entsprechenden Elementen der Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$ . Die Laplace-Transformation der Gleichung (4.1) ergibt

$$sX_i(s) - x_{i_0} = a_{i1}X_1(s) + \cdots + a_{in}X_n(s) + b_{i1}U_1(s) + \cdots + b_{im}U_m(s),$$

und

$$Y_j(s) = c_{j1}X_1(s) + \cdots + c_{jn}X_n(s)$$

und für alle  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, p$ , in Matrix-Form

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

oder umgeformt

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (\text{D.2a})$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s). \quad (\text{D.2b})$$

Gleichung (4.2) ist die Lösung der Zustandsgleichung im  $s$ -Bereich. Rücktransformation in den  $t$ -Bereich liefert  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$ . Gleichung (4.2) beinhaltet zwei Summanden: der erste berücksichtigt den Lösungsanteil der Anfangsbedingung  $\mathbf{x}_0$ , der zweite den des Systemeingangs  $\mathbf{u}$ .

Mit der Beziehung (B.3.2) kann die Inverse  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  in Gleichung (D.2a) als

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (\text{D.1.3})$$

geschrieben werden. Die Determinante im Nenner ist das charakteristische Polynom (in  $s$ ) der Übertragungsfunktion.

#### D.1.1.1 Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung

Von der Darstellung (4.2) der Lösung der Zustandsgleichung gelangt man, wenn die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gesetzt werden, sofort zur Übertragungsfunktion  $\mathbf{G}(s)$ :

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (\text{D.1.4})$$

Bei Mehrgrößensystemen ( $m > 1$  oder  $p > 1$ ) ist die Übertragungsfunktion  $\mathbf{G}(s)$  eine matrixwertige Funktion, d.h.  $\mathbf{G}(s)$  ist eine  $p \times m$ -Matrix mit rationalen Funktionen in  $s$  als Elementen  $g_{ij}(s)$ , die das Übertragungsverhalten vom Eingang  $U_j$  zum Ausgang  $Y_i$  bestimmen.

Beispiel 48 *Das Matrix-Tripel  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  der Strecke des balancierten Stabes ist*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (1 \quad 0).$$

*Es soll die Übertragungsfunktion des Stabes unter Verwendung der Beziehung (D.1.4) bestimmt werden.*

Diese Beziehung wird folgendermaßen ausgewertet

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ -g/l & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2 - g/l} & \frac{1}{s^2 - g/l} \\ \frac{g/l}{s^2 - g/l} & \frac{s}{s^2 - g/l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{s^2 - g/l}. \end{aligned}$$

□

Übung 36 Wiederholen Sie den Rechengang aus Beispiel 48 für folgende Daten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (1 \quad 0).$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Vergleich mit den Matrix-Elementen der Normalform.

□

## D.1.2 Lösung im Zeitbereich

Die Lösung der Zustandsgleichung (D.1a) im Zeitbereich erreichen wir in zwei Schritten: durch Berechnung der homogenen und der partikulären Lösung.

### D.1.2.1 Homogene Lösung

Zunächst sei die Eingangsfunktion  $\mathbf{u}(t)$  Null, d.h. wir suchen die Lösung  $\mathbf{x}_h(t)$  des homogenen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}_h(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t), \quad \mathbf{x}_h(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (\text{D.1.5})$$

Die Lösung sei genügend glatt, so daß sie als Reihenansatz geschrieben werden kann

$$\mathbf{x}_h(t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1(t - t_0) + \boldsymbol{\alpha}_2(t - t_0)^2 + \dots \quad (\text{D.1.6})$$

Mit  $t = t_0$  erhält man sofort  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0$ . Differentiation von (D.1.6) und Substitution in (D.1.5) ergibt

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2(t - t_0) + 3\boldsymbol{\alpha}_3(t - t_0)^2 + \dots = \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t),$$

und daraus  $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  für  $t = t_0$ . Dieser Vorgang wird fortgesetzt und führt zu

$$\mathbf{x}_h(t) = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{A}(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3(t - t_0)^3 + \dots \right] \mathbf{x}_0.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist die Reihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(t-t_0)^k}{k!}, \quad (\text{D.1.7})$$

die unter gewissen Voraussetzungen sehr schnell konvergiert [34], so daß nur eine geringe Anzahl  $k_{\max}$  der Summanden in (D.1.7) berechnet werden muß. Damit errechnet sich die homogene Lösung zu

$$\mathbf{x}_h(t) = \left[ \sum_{k=0}^{k_{\max}} \mathbf{A}^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} \right] \mathbf{x}_0. \quad (\text{D.1.8})$$

Übung 37 Zeigen Sie, daß folgendes gilt:

$$e^{\mathbf{A}(t_2-t_0)} = e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)} e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} \quad (\text{D.1.9})$$

*Hinweis:* Lösen Sie die homogene Gleichung zuerst von  $t_0$  nach  $t_1$  und dann von  $t_1$  nach  $t_2$ .

□

#### D.1.2.2 Partikuläre Lösung

Die partikuläre Lösung  $\mathbf{x}_p(t)$  der Zustandsgleichungen wird durch Variation der Parameter erhalten. Folgender Lösungsansatz sei angenommen

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \xi(t), \quad (\text{D.1.10})$$

mit zu bestimmendem Parametervektor  $\xi(t)$ . Dieser Ansatz muß die Gleichung (D.1a) erfüllen:

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \xi(t) + e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \dot{\xi}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \xi(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

oder aufgelöst

$$\dot{\xi}(t) = e^{-\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

und integriert

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Dieser Ausdruck wird in den Ansatz (D.1.10) substituiert

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

und unter Verwendung von (D.1.9) erhalten wir eine partikuläre Lösung der Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}_p(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (\text{D.1.11})$$

## D.1.2.3 Gesamtlösung

Die homogene Lösung (D.1.8) und die Partikularlösung (D.1.11) ergeben die Gesamtlösung

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) \\ &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\end{aligned}\quad (\text{D.12a})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\quad (\text{D.12b})$$

Wie schon die Lösung (D.2a) im Frequenzbereich zeigt auch die Lösung (D.12a) im Zeitbereich zwei Summanden: der erste beschreibt den Einfluß des Anfangswertes  $\mathbf{x}(t_0)$  auf die Lösung (Anteil der Lösung der homogenen Differentialgleichung), der zweite den Einfluß einer Eingangsfunktion  $\mathbf{u}(t)$ .

Beachten Sie, daß  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  in (D.12a) eine Matrix ist mit elementweise Exponentialfunktionen. Diese Matrix wird als **Transitionsmatrix**

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\quad (\text{D.1.13})$$

des dynamischen Systems (D.1a) bezeichnet, und mit ihr wird (4.12) zu

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,\quad (\text{D.14a})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.\quad (\text{D.14b})$$

Diese Lösung gilt allgemein für lineare Differentialgleichungssysteme, die auch zeitabhängige Matrizen  $\mathbf{A}(t)$  haben dürfen. Bei konstanten Matrizen  $\mathbf{A}$  reduziert sich die Abhängigkeit von  $\Phi(t, t_0)$  von den beiden Variablen  $t$  und  $t_0$  auf deren Differenz  $t - t_0$ :  $\Phi(t - t_0)$  und für  $t_0 = 0$ , was man für zeitinvariante Systeme ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen darf, auf  $\Phi(t)$ . Damit ist die Lösung linearer, zeitinvarianter Systeme

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,\quad (\text{D.15a})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.\quad (\text{D.15b})$$

Warum ist das Argument der Transitionsmatrix im Integranden von (4.15)  $(t - \tau)$ , während das Argument der Eingangsfunktion  $t$  ist? In Gleichung (D.2a) ist der zweite Summand ein Produkt aus zwei Faktoren, die von  $s$  abhängen:  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$ . Dessen inverse Laplace-Transformation ist ein Faltungsintegral der Form  $\int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$ .

→ Kompendium: Satz 6

Ein Vergleich der beiden Lösungen (D.2a) und (D.15a) zeigt folgenden Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten der Transitionsmatrix  $\Phi(\mathbf{t})$  und der Matrix  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ :

$$\mathcal{L}\{\Phi(\mathbf{t})\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.\quad (\text{D.1.16})$$

Übung 38 Rechnen Sie dieses Ergebnis für den skalaren Fall durch.

□

#### D.1.2.4 Methode der unbestimmten Koeffizienten

Vorgelegt sei die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (\text{D.1.17})$$

gesucht ist die partikuläre Lösung  $x_p(t)$ .

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten ist ein einfacher Spezialfall der Methode der Variation der Parameter[28] und ist u.a. auf die Ansätze der Erregerfunktionen  $f(t)$  in Tab. D.1 anwendbar, bei denen die Ableitungen von  $f(t)$  der Funktion  $f(t)$  ähnlich sind.

$f(t)$	$x_p(t)$
$ae^{\omega t}$	$Ae^{\omega t}$
$at^n$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_{n-1} t^{n-1} + A_n t^n$
$a \cos \omega t$	$A_0 \cos \omega t + A_1 \sin \omega t$
$a \sin \omega t$	$A_0 \cos \omega t + A_1 \sin \omega t$

Tabelle D.1: Unbestimmte Koeffizienten

Folgende Regeln sind auf Gl. (D.1.17) anwendbar:

1. Ist  $f(t)$  eine der Funktionen in Spalte 1 von Tab. D.1, dann wird der korrespondierende Ansatz  $x_p(t)$  aus Spalte 2 gewählt. Die unbestimmten Koeffizienten des Ansatzes werden als Lösung eines linearen Gleichungssystems erhalten, das sich durch Einsetzen von  $x_p$  und seiner Ableitungen in Gl. (D.1.17) ergibt.
2. Löst  $f(t)$  den homogenen Teil von Gl. (D.1.17), dann wird der entsprechende Ansatz  $x_p(t)$  mit  $t$  multipliziert, wenn die Lösung einer einfachen Wurzel der charakteristischen Gl. von (D.1.17) entspricht oder mit  $t^2$  im Falle einer doppelten Nullstelle usw..
3. Ist  $f(t)$  Summe von Komponenten aus Spalte 1, dann ist  $x_p(t)$  Summe der korrespondierenden Komponenten aus Spalte 2.

Beispiel 49 Regel 1. Lösen Sie

$$2\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2t^2 - t.$$

Der Ansatz für  $x_p$  ist nach Tab. D.1

$$x_p = A_2 t^2 + A_1 t + A_0,$$

und seine Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= 2A_2t + A_1, \\ \ddot{x}_p &= 2A_2.\end{aligned}$$

In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt dies

$$4A_2 + 2(2A_2t + A_1) + A_2t^2 + A_1t + A_0 = 2t^2 - t,$$

oder nach Umordnung

$$A_2t^2 + (4A_2 + A_1)t + 4A_2 + 2A_1 + A_0 = 2t^2 - t.$$

Der Koeffizientenvergleich der Polynome auf der rechten und linken Seite ergibt folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}A_2 &= 2, \\ 4A_2 + A_1 &= -1, \\ 4A_2 + 2A_1 + A_0 &= 0,\end{aligned}$$

und damit  $A_2 = 2$ ,  $A_1 = -9$  und  $A_0 = 10$  und

$$x_p(t) = 2t^2 - 9t + 10.$$

□

Übung 39 Bestimmen Sie für dieses Beispiel die Gesamtlösung für  $x_0 = 1$  und  $\dot{x}_0 = -1$ .

□

Übung 40 Warum funktioniert  $x_p = A_2t^2 + A_1t$  nicht?

□

Beispiel 50 Regel 2. Lösen Sie

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = e^{-2t}.$$

Der „natürliche“ Ansatz  $x_p = Ae^t$  führt nicht zum Ziel. (Probieren Sie ihn und beurteilen Sie den Mißerfolg!)

Wir wählen

$$x_p = Ate^{-2t}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A(e^{-2t} - 2te^{-2t}), \\ \ddot{x}_p &= 4A(e^{-2t} - te^{-2t}),\end{aligned}$$

und erhalten nach Einsetzen in die Differentialgleichung

$$4A(te^{-2t} - e^{-2t}) + 5A(e^{-2t} - 2te^{-2t}) + 6Ate^{-2t} = e^{-2t}$$

eine lineare Gleichung in  $A$ , deren Lösung  $A = 1$  die partikuläre Lösung

$$x_p = t e^{-2t}$$

ergibt.

□

Übung 41 Bestimmen Sie für dieses Beispiel die Gesamtlösung für  $x_0 = 0$  und  $\dot{x}_0 = 0$ . Vorsicht: Es ist nicht etwa  $x_h \equiv 0$ !

□

Ein Maple-Worksheet vollzieht Beispiel und Übung nach:

```
> restart;
> ode:=diff(x(t),t,t)+5*diff(x(t),t)+6*x(t)=exp(-2*t);
      ode := ( $\frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t)$ ) + 5 ( $\frac{\partial}{\partial t} x(t)$ ) + 6 x(t) =  $e^{(-2t)}$ 
> dsolve({ode,x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t));
      x(t) =  $-e^{(-2t)} + t e^{(-2t)} + e^{(-3t)}$ 
> f:=exp(-2*t);
      f :=  $e^{(-2t)}$ 
> a:=A*t*f;
      a :=  $A t e^{(-2t)}$ 
> b:=diff(a,t);
      b :=  $A e^{(-2t)} - 2 A t e^{(-2t)}$ 
> c:=diff(a,t,t);
      c :=  $-4 A e^{(-2t)} + 4 A t e^{(-2t)}$ 
> leq:=c+5*b+6*a=f;
      leq :=  $A e^{(-2t)} = e^{(-2t)}$ 
> A:=solve(leq,A);
      A := 1
```

Beispiel 51 Regel 3. Lösen Sie

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = e^{2t} + t^2.$$

Die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A_3 e^{2t} + A_2 t^2 + A_1 t + A_0 \\ &= \frac{1}{20} e^{2t} + \frac{1}{6} t^2 - \frac{5}{18} t + \frac{19}{108}, \end{aligned}$$

und sie wird in folgender Maple-Sitzung erarbeitet.

```
> restart;
> ode:=diff(x(t),t,t)+5*diff(x(t),t)+6*x(t)=exp(2*t)+t^2;
      ode := ( $\frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t)$ ) + 5 ( $\frac{\partial}{\partial t} x(t)$ ) + 6 x(t) =  $e^{(2t)} + t^2$ 
```

```

> dsolve({ode, x(0)=0, D(x)(0)=0}, x(t));
x(t) = 1/540 (27 e^(5t) + 90 e^(3t) t^2 - 150 t e^(3t) + 95 e^(3t)) e^(-3t) + 37/135 e^(-3t) - 1/2 e^(-2t)
> dsolve({ode}, x(t));
x(t) = 1/540 (27 e^(5t) + 90 e^(3t) t^2 - 150 t e^(3t) + 95 e^(3t)) e^(-3t) + _C1 e^(-3t) + _C2 e^(-2t)
> expand(%);
      x(t) = 1/20 (e^t)^2 + 1/6 t^2 - 5/18 t + 19/108 + _C1/(e^t)^3 + _C2/(e^t)^2
> f:=exp(2*t)+t^2;
      f := e^(2t) + t^2

```

*Ansatz fuer die partikulaere Loesung*

```

> xp:=A[3]*exp(2*t)+A[2]*t^2+A[1]*t+A[0];
      xp := A3 e^(2t) + A2 t^2 + A1 t + A0

```

*Differentiation des Ansatzes*

```

> xpp:=diff(xp, t);
      xpp := 2 A3 e^(2t) + 2 A2 t + A1
> xppp:=diff(xp, t, t);
      xppp := 4 A3 e^(2t) + 2 A2

```

*Einsetzen des Ansatzes und seiner Ableitungen in die Differentialgleichung*

```

> leq:=xppp+5*xpp+6*xp=f;
leq := 20 A3 e^(2t) + 2 A2 + 10 A2 t + 5 A1 + 6 A2 t^2 + 6 A1 t + 6 A0 = e^(2t) + t^2
> lhss:=sort(lhs(leq)-op(1, lhs(leq)));
      lhss := 6 A2 t^2 + 10 A2 t + 6 A1 t + 2 A2 + 5 A1 + 6 A0
> lhsc:=collect(lhss, t);
      lhsc := 6 A2 t^2 + (6 A1 + 10 A2) t + 5 A1 + 6 A0 + 2 A2

```

*Koeffizientenvergleich*

```

> eq[1]:=op(1, op(1, lhs(leq)))*op(2, op(1, lhs(leq)))=1;
      eq1 := 20 A3 = 1
> eq[2]:=coeff(lhsc, t, 2)=1;
      eq2 := 6 A2 = 1
> eq[3]:=coeff(lhsc, t, 1)=0;
      eq3 := 6 A1 + 10 A2 = 0
> eq[4]:=coeff(lhsc, t, 0)=0;
      eq4 := 5 A1 + 6 A0 + 2 A2 = 0

```

*Loesung des linearen Gleichungssystems*

```

> solve({eq[1], eq[2], eq[3], eq[4]}, {A[0], A[1], A[2], A[3]});

```

$$\{A_0 = \frac{19}{108}, A_1 = \frac{-5}{18}, A_2 = \frac{1}{6}, A_3 = \frac{1}{20}\}$$

□

Aufgabe 31 *Lösen Sie*

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 16e^t + \sin 2t.$$

□

## D.2 Numerische Lösung

Die numerische Lösung der Zustandsgleichung (4.15) auf dem Digitalrechner kann mit mehreren Ansätzen gewonnen werden. Wir betrachten einen Diskretisierungsansatz für speziell lineare Differentialgleichungen und einen Ansatz durch Entwicklung in eine Taylorreihe für allgemeine (auch nichtlineare) Differentialgleichungen.

### D.2.1 Diskretisierung

Beim Diskretisierungsansatz soll die Lösung schrittweise über Teilintervalle mit der Intervalllänge  $T$  integriert werden.

#### D.2.1.1 Lösungsalgorithmus

Wir seien bei  $kT$  angelangt und gehen den Schritt nach  $kT + T$ :

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (\text{D.2.1})$$

Während dieses Schrittes halten wir

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT), \quad kT \leq \tau < kT + T.$$

konstant (Halteglied nullter Ordnung). Dadurch kann  $\mathbf{u}(\cdot)$  aus dem Integranden genommen werden. Änderung der Variablen  $\eta = kT + T - \tau$  erleichtert die Integration:

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \mathbf{B} \mathbf{u}(kT). \quad (\text{D.2.2})$$

Mit

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T}, \quad (\text{D.3a})$$

$$\Gamma(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \mathbf{B} \quad (\text{D.3b})$$

wird Gleichung (D.2.2) und die zugehörige Gleichung der Ausgangsgröße

$$\mathbf{x}(kT + T) = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \Gamma(T)\mathbf{u}(kT), \quad (\text{D.4a})$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT). \quad (\text{D.4b})$$

### D.2.1.2 Berechnung von $\Phi$ und $\Gamma$

Nach (D.1.7) ist

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2T^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3T^3 + \dots$$

die Reihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion. Die Terme  $\Phi$  und  $\Gamma$  können unter einheitlichen Gesichtspunkten berechnet werden, wenn

$$\Psi(T) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2T^2}{3!} + \dots$$

oder numerisch stabiler

$$\Psi(T) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{3} \left( \dots \frac{\mathbf{A}T}{N-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{N} \right) \right) \dots \right)$$

definiert wird. Dann berechnet sich

$$\Phi(T) = \mathbf{I} + \mathbf{A}T\Psi(T) \quad (\text{D.2.5})$$

und

$$\Gamma(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k T^{k+1}}{(k+1)!} \mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k T^k}{(k+1)!} T\mathbf{B} = \Psi(T)T\mathbf{B}. \quad (\text{D.2.6})$$

Übung 42 Verifizieren Sie die unendliche Summe in (D.2.6) durch Integration von (D.3b).

□

Damit reduziert sich die numerische Berechnung der Zustandsgleichung auf die Ermittlung von  $\Psi(T)$ . Ein Computer-Programm 2 in der MATLAB-Syntax [47] zeigt, wie einfach das ist.

Algorithmus 2 Berechnung von  $\Phi$  und  $\Gamma$  aus der Matrix-Exponential-Funktion:

```

1      function [Phi, Gamma] = c2d(a, b, t)
2      % Conversion of state space models
3      % from continuous to discrete time.
4      % [Phi, Gamma] = C2D(A,B,T)
5      % converts the continuous-time system:
6      %
7      %       x = Ax + Bu
8      %
9      % to the discrete-time state-space system:

```

```

10      %
11      %           x[n+1] = Phi * x[n] + Gamma * u[n]
12      %
13      % assuming a zero-order hold on the inputs
14      % and sample time T.
15
16      error(nargchk(3,3,nargin));
17      error(abcdchk(a,b));
18
19      [m,n] = size(a);
20      [m,nb] = size(b);
21      s = expm([[a b]*t; zeros(nb,n+nb)]);
22      Phi = s(1:n,1:n);
23      Gamma = s(1:n,n+1:n+nb);
24
25
26      function e = expm(a)
27      % Matrix exponential via Taylor series.
28      % Scale A by power of 2 so that its norm is < 1/2 .
29      s = round(log(norm(a,1))/log(2)+1.5);
30      if s < 0,
31          s = 0;
32      end
33      a = a/2^s;
34
35      % Taylor series for exp(A)
36      [m,n] = size(a);
37      k = 1;
38      e = 0*a;
39      f = eye(m,n);
40      while norm(e+f-e,1) > 0,
41          e = e + f;
42          f = a*f/k;
43          k = k+1;
44      end
45
46      % Undo scaling by repeated squaring
47      for k = 1:s,
48          e = e*e;
49      end

```

□

## D.2.2 Taylor-Entwicklung

Die Darstellung der Lösung einer allgemeinen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

durch Entwicklung in eine Taylor-Reihe beschränken wir der Übersicht halber auf den Fall einer skalaren Differentialgleichung in einer Variablen  $x$ , also  $n = 1$ .

Die Beschreibung bleibt für Systeme von Differentialgleichungen,  $n > 1$ , gültig, und man findet sie in vielen Lehrbüchern zur numerischem Mathematik [8, 45].

### D.2.2.1 Lösungsalgorithmus

Es sei angenommen, daß in

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{D.2.7})$$

die Funktion  $f$  genügend oft nach  $x$ ,  $u$  und  $t$  differenzierbar ist. Wenn  $\partial f / \partial x =: f_x$  und  $\partial f / \partial u =: f_u$  stetig sind, dann besitzt die Differentialgleichung (D.2.7) eine eindeutige Lösung  $x(t)$ . Diese entwickeln wir in eine Taylor-Reihe um den Punkt  $t = t_0$ :

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)\dot{x}(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\ddot{x}(t_0) + \dots, \quad (\text{D.2.8})$$

deren Ableitungen wir nicht explizit kennen, da die Lösung nicht bekannt ist. Wir beschaffen die Ableitungen durch totale Differentiation von (D.2.7)

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (\text{D.9a})$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}f(x, u, t) = f_t + f_x\dot{x} + f_u\dot{u} = f_t + f_x f + f_u \dot{u}, \quad (\text{D.9b})$$

$$\vdots$$

Übung 43 *Bilden Sie die dritte totale Ableitung der Differentialgleichung (D.2.7).*

□

Diese Übung zeigt, daß die höheren totalen Ableitungen sehr komplexe Ausdrücke werden. Daraus werden alternativ folgende Konsequenzen gezogen:

1. die Taylor-Entwicklung wird nach wenigen Termen abgebrochen; dann ist (D.2.8) nur in einer kleinen Umgebung von  $t_0$  gültig,
2. die totalen Ableitungen in der Taylor-Entwicklung werden durch zusätzliche Auswertung der Funktion  $f$  an geeigneten Zwischenwerten im Integrationsintervall gewonnen; dann muß ein höherer numerischer Aufwand eingesetzt werden, (D.2.8) ist aber in einer größeren Umgebung von  $t_0$  gültig.

Es sei nun angenommen, daß die Entwicklung (D.2.8) eine brauchbare Näherung der Lösung für einen Schritt  $h = t - t_0$  darstellt. Dann können  $x$  und alle seine totalen Ableitungen an der Stelle  $t = t_0 + h$  ausgewertet werden, und mit ihnen kann ein neuer Schritt  $t + h$  gemacht werden. Mit der Definition des Operators  $T$

$$T_k(x, u, t) = f(x, u, t) + \frac{h}{2!}f'(x, u, t) + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!}f^{(k-1)}(x, u, t), \quad (\text{D.2.10})$$

wird dieser Vorgang als Algorithmus 3 formalisiert

Algorithmus 3 Taylor-Entwicklung der Ordnung  $k$  zur Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad x(t_0) = x_0,$$

1. wähle eine Schrittweite

$$h = \frac{t_f - t_0}{N},$$

2. setze

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N,$$

3. berechne Approximationen  $x_i$  der Lösung  $x(t_i)$  durch die Rekursion

$$x_{i+1} = x_i + hT_k(x_i, u(t_i), t_i), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

mit  $T_k(x, u, t)$  nach (D.2.10).

□

Das Rest-Glied der Taylor-Entwicklung der Ordnung  $k$

$$\begin{aligned} R &= \frac{h^{(k+1)}}{(k+1)!} f^{(k)}(x(\tau), u(\tau), \tau), \\ &= \frac{h^{(k+1)}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(\tau), \quad t_i < \tau < t_i + h, \end{aligned}$$

zeigt, daß der Fehler der Approximation von der Ordnung  $k+1$ ,  $\mathcal{O}(h^{k+1})$ , ist.

D.2.2.1.1 Euler-Verfahren Für die Ordnung  $k = 1$  wird Algorithmus 3 als Euler-Verfahren bezeichnet:

Algorithmus 4 Euler-Verfahren:

Schritt 1 und 2 wie in Algorithmus 3,

Schritt 3:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, u(t_i), t_i), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

□

Das Restglied,

$$R = \frac{1}{2}h^2\ddot{x}(\tau),$$

zeigt, daß der Fehler von  $\mathcal{O}(h^2)$  ist.

D.2.2.1.2 Heun-Verfahren Für die Ordnung  $k = 2$  wird Algorithmus 3 als Heun-Verfahren bezeichnet:

Algorithmus 5 Heun-Verfahren:

*Schritt 1 und 2 wie in Algorithmus 3,*

*Schritt 3:*

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, u(t_i), t_i), \\ x_{i+1} &= x_i + 1/2[k_1 + hf(x_i + k_1, u(t_{i+1}), t_{i+1})], \quad i = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

□

Übung 44 *Bilden Sie das Restglied und daraus die Ordnung des Heun-Verfahrens.*

□

D.2.2.1.3 Runge-Kutta-Verfahren Für Ordnungen  $k > 1$  werden die Ableitungen durch zusätzliche Funktionsauswertungen an geeigneten Zwischenwerten im Intervall  $t_i \leq t \leq t_i + h$  gewonnen. Auf die Ableitung wird hier verzichtet [8, Seite 362–366]. Das bekannteste Verfahren ist das von Runge und Kutta vierter Ordnung, das im folgenden Algorithmus beschrieben wird.

Algorithmus 6 Runge-Kutta-Verfahren:

*Schritt 1 und 2 wie in Algorithmus 3,*

*Schritt 3:*

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, u(t_i), t_i), \\ k_2 &= hf(x_i + 1/2k_1, u(t_i + 1/2h), t_i + 1/2h), \\ k_3 &= hf(x_i + 1/2k_2, u(t_i + 1/2h), t_i + 1/2h), \\ k_4 &= hf(x_i + k_3, u(t_i + h), t_i + h), \\ x_{i+1} &= x_i + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

□

Der Fehler ist hier von  $\mathcal{O}(h^5)$ .

#### D.2.2.2 Computer-Prozedur

Eine einfache Implementierung des Runge-Kutta-Verfahrens zeigt das folgende FORTRAN-Unterprogramm. Dieses rechnet mit fester Schrittweite  $h$ , effizientere Implementierungen mit Schrittweitensteuerungen finden Sie in Referenz [22, 26, 27, 42].

```

1      subroutine RuKu4 (f, n, x, t, h)
2      double precision x(*), t, h, hh
3      double precision dx [allocatable] (:)
4      double precision k1 [allocatable] (:)
5      double precision k2 [allocatable] (:)

```

```

6      double precision k3 [allocatable] (:)
7      double precision k4 [allocatable] (:)
8      integer          i, n
9      external         f
10
11     allocate (dx(n),k1(n),k2(n),k3(n),k4(n))
12     hh = h/2
13     call f(k1,x,t)
14     do i = 1,n
15     dx(i) = x(i)
16     x(i) = dx(i)+k1(i)*hh
17     end do
18     call f(k2,x,t+hh)
19     do i = 1,n
20     x(i) = dx(i)+k2(i)*hh
21     end do
22     call f(k3,x,t+hh)
23     t=t+h
24     do i = 1,n
25     x(i) = dx(i)+k3(i)*h
26     end do
27     call f(k4,x,t)
28     do i = 1,n
29     x(i) = dx(i)+(k1(i)+2*k2(i)+2*k3(i)+k4(i))*h/6
30     end do
31     deallocate (dx, k1, k2, k3, k4)
32     return
33     end

```

### D.3 Beispiel: Balancierter Stab

Als Beispiel für die Anwendung der im Abschnitt D.2 besprochenen numerischen Lösungsverfahren wollen wir den mit einem PD-Regler und einem Zustandsregler geregelten Stab simulieren. Aus Stabilitätsgründen wird nicht die unregelte Strecke berechnet, sondern die geregelte mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-(K_D s + K_P)}{s^2 - K_D s - (g/l + K_P)}. \quad (\text{D.3.1})$$

Die Regler-Normalform des PD-geregelten Stabes ist in Abbildung D.1 gezeigt, und deren Koeffizienten sind

$$a_0 = -(g/l + K_P), \quad a_1 = -K_D,$$

und

$$b_0 = -K_P, \quad b_1 = -K_D.$$

Damit lässt sich die Regler-Normalform des geregelten balancierten Stabes formulieren:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l + K_P & K_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad (\text{D.2a})$$

$$y(t) = (-K_P \quad -K_D) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2b})$$

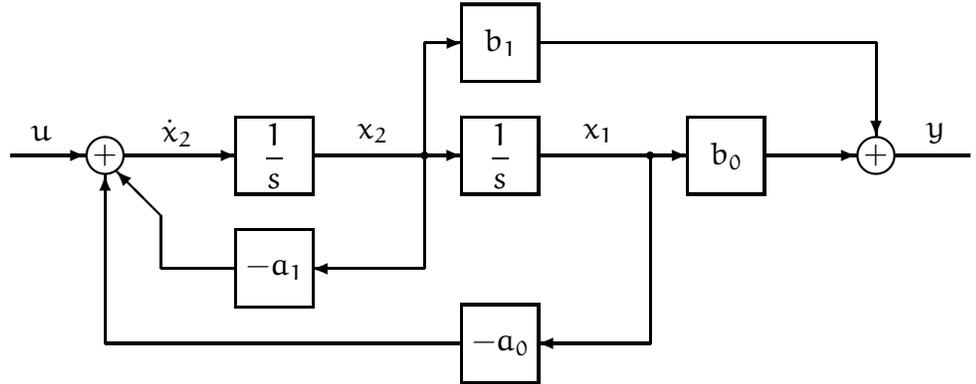


Abbildung D.1: Regler-Normalform des balancierten Stabes

Die Regler-Parameter  $K_D$  und  $K_P$  sollen wieder durch Polvorgabe bestimmt werden. Die beiden Pole des geregelten Systems sollen diesmal bei  $s_{1,2} = -1 \pm i$  liegen. Daraus ergeben sich für  $g/l = 9$  die Parameter

$$K_D = -2 \quad \text{und} \quad K_P = -11.$$

Übung 45 Bitte bestätigen Sie durch Vergleich der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Übertragungsfunktion (D.3.1) die numerischen Werte der Regler-Parameter.

□

Die numerischen Lösungsverfahren gelten für beliebiges (beschränktes) Eingangssignal  $u(t)$ . Für einen Vergleich beschränken wir uns hier auf den Einheitssprung, d.h.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases},$$

dessen Laplace-Transformierte  $U(s) = 1/s$  ist.

Die exakte Lösung des Problems (D.3.1) ist dann

→ Kompendium: Abschnitt 2.2.2

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-K_P}{-(K_P + g/l)} (1 - e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta)) \\ &+ \frac{-K_D}{\sqrt{-(K_P + g/l)}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t, \end{aligned} \quad (\text{D.3.3})$$

mit  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$  und  $\theta = \arccos \zeta$ .

Übung 46 Bitte rechnen Sie als Wiederholung des Stoffs der Vorlesung Regelungstechnik diese Lösung nach. Überlegen Sie sich, daß deren zweiter Summand der differenzierende Anteil des Zählers der Übertragungsfunktion ist.

□

### D.3.1 Diskretisierung

Die Lösung des Problems (4.2) mit dem Diskretisierungsansatz (D.4a) ist in Abbildung D.2 in der linken Hälfte dargestellt. Dabei ist das Zeitintervall  $t \in [0, 5]$  in  $k = 128$ ,  $k = 8$  und  $k = 1$  Teilintervalle aufgeteilt. Die Graphen der entsprechenden Lösungen sind durch ausgezogene, gestrichelte, bzw. punktierte Linienzüge gekennzeichnet.

Abbildung D.2: Numerische Lösung der Zustandsgleichung

Für enge Diskretisierung ( $k = 128$ ) fällt der Graph mit der exakten Lösung (4.3) zusammen. Die Lösungen der beiden anderen Diskretisierungen stimmen nur für  $t = iT$ ,  $i = 0, \dots, k$ , mit  $T$  dem Diskretisierungsintervall, mit der exakten Lösung überein.

→ Rechenzeitvergleich  
in der Vorlesungsübung

Soll die Lösung nur für gewisse diskrete Zeitpunkte erhalten werden, dann ist für lineare Differentialgleichungen der Diskretisierungsansatz sehr ökonomisch bezüglich der aufzuwendenden Rechenleistung. Die Lösungen für Zwischenzeitpunkte können durch verschiedene Interpolationsansätze gewonnen werden: lineare Interpolation oder Spline-Interpolation.



Zur Rekapitulation: Dieser Diskretisierungsansatz eignet sich nur für lineare bzw. linearisierte Differentialgleichungen, deren Parameter *nicht* von der unabhängigen Variablen  $t$  abhängen.

### D.3.2 Reihen-Entwicklung

Die Lösung des Problems (4.2) mit Hilfe der Taylor-Entwicklung des Algorithmus 3 zur Ordnung  $k = 1$  ist in Abbildung D.2 in der rechten Hälfte dargestellt. Dabei sind die Schrittweiten  $h = 0.05$ ,  $h = 0.2$  und  $h = 1$  Sekunden gewählt. Die Graphen der entsprechenden Lösungen sind wieder durch ausgezogene, gestrichelte, bzw. punktierte Linienzüge gekennzeichnet.

Im Gegensatz zum Diskretisierungsansatz, bei dem die Lösung im Diskretisierungspunkt  $iT$ , unabhängig von der Größe von  $T$ , gewonnen wird, ist die Lösung beim Reihenansatz entscheidend von der Schrittweite  $h$  abhängig. Für zu groß gewähltes  $h$  (um geringe Rechenzeit zu beanspruchen) wird der maximale Fehler im gewählten Beispiel für die Ordnung  $k = 1$  (Euler-Verfahren) über 25% und damit das Ergebnis unbrauchbar. Für noch größere Schrittweiten wird das

Verfahren sogar instabil. Über Stabilitätsprobleme beim Lösen von Differentialgleichungen wird auf die Spezialliteratur [23] verwiesen.

Wird die Ordnung auf  $k = 4$  (Runge-Kutta-Verfahren) erhöht, dann erhöht sich auch der Rechenaufwand pro Schritt auf das Vierfache, aber der Fehler verringert sich auf 0.1%. Um einen bestimmten Fehler nicht zu überschreiten, kann man beim Runge-Kutta-Verfahren eine bedeutend größere Schrittweite wählen als beim Euler-Verfahren. Insgesamt ist solch ein Runge-Kutta-Verfahren mittlerer Ordnung (ergänzt um eine schnelle Schrittweitensteuerung) ein sehr effizientes Simulationswerkzeug.

→ Rechenzeitvergleich  
in der Vorlesungsübung

Zur Rekapitulation: Der Taylor-Reihen-Ansatz eignet sich für beliebige, auch nichtlineare, Differentialgleichungen.





## Anhang E

# Charakterisierung partieller Differentialgleichungen

### First Order Linear Equations

Consider the first order linear partial differential equation in two variables  $x$  and  $y$ :

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y). \quad (\text{E.0.1})$$

### Transformation of PDE into ODE

We try to find variables  $\xi = \varphi(x, y)$  and  $\eta = \psi(x, y)$  which transform equation (E.0.1) into solvable form

$$v_\xi + d(\xi, \eta)v = g(\xi, \eta), \quad (\text{E.0.2})$$

where  $v(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , and equation (E.0.2) is a linear first order ordinary differential equation in  $\xi$  with  $\eta$  as a parameter.

We want the co-ordinate changes to be one-to-one, which requires a non-zero determinant of the Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0. \quad (\text{E.0.3})$$

To find a suitable transformation, first  $u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$  and  $u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$  are substituted into equation (E.0.1) to give

$$a(v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x) + b(v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y) + cv = f$$

or

$$(a\xi_x + b\xi_y)v_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)v_\eta + cv = f. \quad (\text{E.0.4})$$

If  $\eta$  is chosen such that  $a\eta_x + b\eta_y = 0$  we get

$$\frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{b}{a}$$

for  $\eta_y \neq 0$ .

On the other hand we have for  $\eta(x, y) = k$ , with  $k$  an arbitrary constant,  $d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy = 0$ , which leads to

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{b}{a}. \quad (\text{E.0.5})$$

This is the characteristic equation of equation (E.0.1). The equation

$$\eta(x, y) = k \quad (\text{E.0.6})$$

defines a family of curves in the  $(x, y)$  plane which are called the characteristics of problem (E.0.1).

To further reduce equation (E.0.1) to the form of eq. (E.0.2) we choose

$$\xi = x.$$

This guarantees

$$J = \begin{vmatrix} \eta_x & \eta_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\eta_y \neq 0$$

by the assumption on  $\eta_y$  in equation (E.0.5). Now equation (E.0.4) reduces to

$$a(x, y)v_\xi + c(x, y)v = f(x, y)$$

or in terms of  $(\xi, \eta)$

$$A(\xi, \eta)v_\xi + C(\xi, \eta)v = F(\xi, \eta),$$

which for  $A(\xi, \eta) \neq 0$  is with

$$v_\xi + \frac{C(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)}v = \frac{F(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)} \quad (\text{E.0.7})$$

of the desired form with

$$d(\xi, \eta) = \frac{C(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)} \quad \text{and} \quad g(\xi, \eta) = \frac{F(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)}.$$

## Solution of ODE

Now, for the solution of equation (E.0.7), we multiply it by  $e^{\int d(\xi, \eta) d\xi}$  to get

$$e^{\int d(\xi, \eta) d\xi} v_\xi + d(\xi, \eta) e^{\int d(\xi, \eta) d\xi} v = g(\xi, \eta) e^{\int d(\xi, \eta) d\xi}.$$


---

As the left hand side is  $(e^{\int d(\xi, \eta) d\xi} v)_{\xi}$  the equation can be integrated with respect to  $\xi$  with the result

$$e^{\int d(\xi, \eta) d\xi} v = \int g(\xi, \eta) e^{\int d(\xi, \eta) d\xi} d\xi + h(\eta)$$

or

$$v(\xi, \eta) = e^{-\int d(\xi, \eta) d\xi} \int g(\xi, \eta) e^{\int d(\xi, \eta) d\xi} d\xi + h(\eta) e^{-\int d(\xi, \eta) d\xi}, \quad (\text{E.0.8})$$

where  $h(\eta)$  is any differentiable function of one variable. This expression has to be transformed back into the original variables  $(x, y)$

$$u(x, y) = e^{\alpha(x, y)} [\beta(x, y) + h(\psi(x, y))], \quad (\text{E.0.9})$$

which is the desired solution.

**Example 1** With  $a \neq 0$ ,  $b$ , and  $c$  as real numbers find the solution of

$$au_x + bu_y + cu = 0.$$

The characteristic equation is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a},$$

which can be integrated as

$$bx - ay = k.$$

Now take

$$\xi = x \quad \text{and} \quad \eta = bx - ay,$$

to get

$$av_{\xi} + cv = 0$$

or

$$v_{\xi} + \frac{c}{a}v = 0.$$

By multiplying this equation by  $e^{\int (c/a) d\xi} = e^{(c/a)\xi}$  we get

$$e^{(c/a)\xi} v_{\xi} + \frac{c}{a} v e^{(c/a)\xi} = 0$$

or

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (e^{(c/a)\xi} v) = 0.$$

Integration yields

$$e^{(c/a)\xi} v = h(\eta)$$

or

$$v(\xi, \eta) = e^{-(c/a)\xi} h(\eta)$$

and back transformation

$$u(x, y) = e^{-(c/a)x} h(bx - ay).$$

**Exercise 1** Try to solve

$$u_x + \cos(x)u_y = xy,$$

and

$$xu_x - u_y + u = x.$$


---



# Literaturverzeichnis

- [1] J. P. Bandstra. Comparison of equivalent viscous damping and nonlinear damping in discrete and continuous vibrating systems. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, Reliability in Design*, 105:382–392, 1983.
- [2] H. Baruh. *Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, Boston, 1999.
- [3] F. P. Beer and W. Johnston. *Mechanics of Materials*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [4] D. Betounes. *Partial Differential Equations for Computational Sciences*. Springer, New York, 1997.
- [5] R. D. Blevins. *Flow-Induced Vibration*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [6] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [7] P. Chen and M. A. Harrison. Index preparation and processing. *Software-Practice and Experience*, 19(9):897–915, 1988.
- [8] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [9] J. M. Cooper. *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [10] G. R. Cowper. The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory. *J. Appl. Mechanics*, 33:335–340, 1966.
- [11] S. H. Crandall. The role of damping in vibration theory. *J. Sound and Vibration*, 11:3–18, 1970.
- [12] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer, New York, 1978.
- [13] G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*. Oldenbourg, München, 1981.
- [14] D. J. Ewins. *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies Press, New York, 1984.

- [15] D. J. Ewins and P. T. Gleeson. A method for modal identification of lightly damped structures. *J. Sound and Vibration*, 84(1):57–79, 1982.
  - [16] U. Fischer and W. Stephan. *Mechanische Schwingungen*. Fachbuchverlag, Leipzig-Köln, 1993.
  - [17] R. W. Fox and A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*. Wiley, New York, 1992.
  - [18] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Reading, 1994.
  - [19] B. Fuchssteiner. *MuPAD User's Manual*. Wiley-Teubner, Chichester-Stuttgart, 1996.
  - [20] J. M. Gere and S. G. Timoshenko. *Mechanics of Materials*. PWS Publishing Company, Boston, 1997.
  - [21] G. H. Golub and C. F. van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
  - [22] D. Gruntz. Symbolic computation of explicit runge-kutta formulas. In W. Gander and J. Hřebiček, editors, *Solving Problems in Scientific Computation Using Maple and Matlab*, chapter 19, pages 251–266. Springer, Berlin, 1993.
  - [23] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I — Nonstiff Problems*. Springer, Berlin, 1987.
  - [24] A. Heck. *Introduction to Maple*. Springer, New York, 1996.
  - [25] D. J. Inman. *Engineering Vibration*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994.
  - [26] D. Kahaner, C. Moler, and S. Nash. *Numerical Methods and Software*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.
  - [27] D. Kraft. Tomp — fortran modules for optimal control calculations. *ACM Trans. Math. Softw.*, 20(3):262–281, 1994.
  - [28] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, New York, 1988.
  - [29] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Modern Signals and Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
  - [30] D. J. Logan. *Applied Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1998.
  - [31] N. M. M. Maia and D. J. Ewins. A new approach for the modal identification of lightly damped structures. *Mech. Systems and Signal Processing*, 3(2):173–193, 1989.
  - [32] N. M. M. Maia and J. M. M. Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press, London, 1997.
-

- 
- [33] C. Moler and et al. *Using Matlab Version 5*. The MathWorks, Natick, MA, 1996.
- [34] C. B. Moler and C. F. van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Review*, 20:801–836, 1978.
- [35] M. B. Monagan, K. O. Geddes, G. Labahn, and S. Vorkoetter. *Maple V Programming Guide*. Springer, New York, 1996.
- [36] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990.
- [37] P. V. O’Neil. *Beginning Partial Differential Equations*. John Wiley, New York, 1999.
- [38] B. N. Parlett. *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [39] M. J. D. Powell. *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [40] S. S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley, Reading, 1995.
- [41] D. Redfern. *The Maple Handbook*. Springer, New York, 1996.
- [42] L. F. Shampine and M. W. Reichelt. The matlab ode suite. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(1):1–22, 1997.
- [43] B. T. Smith, J. M. Boyle, J. J. Dongarra, B. S. Garbow, Y. Ikebe, V. C. Klema, and C. B. Moler. *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide*. Springer, New York, 1976.
- [44] G. W. Stewart. *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press, New York, 1973.
- [45] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, New York, 1980.
- [46] G. Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Academic Press, New York, 1976.
- [47] TheMathWorks. *Matlab User’s Guide*. TheMathWorks, Natick, 1992.
- [48] W. T. Thomson. *Theory of Vibration with Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- [49] J. Wittenburg. *Schwingungslehre*. Springer, Berlin, 1996.
- [50] S. Wolfram. *Mathematica – A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1991.
-

