

Allgemeines

GIBBSsche Phasenregel $f = K + 2 + P$ K: Komponenten, P: Phasen

Allgemeine Gasgleichung $p \cdot V = R \cdot T$

Kompressibilität $\tau = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dp}$ Luft $\rightarrow \tau_T = 5 \cdot 10^5 \text{ m}^2/\text{N}$
 Wasser $\rightarrow \tau_T = 5 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{N}$
 $\rightarrow dp = \rho \cdot \tau \cdot dp$ Dichteänderung infolge Druckänderung

BERNOULLI – Gleichung $p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const}$ V=Strömungsgeschwindigkeit

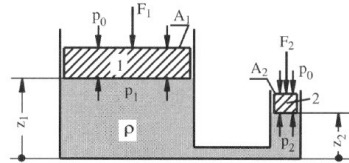
Teil 1: Hydrostatik

Hydrostatisches Grundgesetz $p = p_0 + \rho gh$

→hydrostatisches Paradoxon: Die Kraft auf einen Behälterboden ist nur abhängig von der Grundfläche und der Füllhöhe

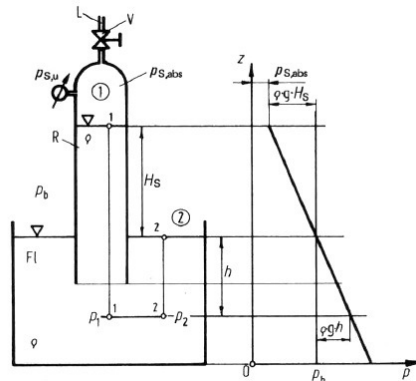
Kommunizierende Röhren $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$

Hydraulische Presse $\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} + \rho gh$



Saughöhe einer Pumpe

$$H_S = \frac{p_b - p_{Sabs}}{\rho \cdot g} = \frac{p_{S.u}}{\rho \cdot g}$$



Archimedische Auftriebskraft

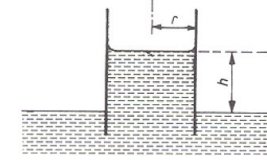
$$dF_a = g \cdot \rho_F \cdot (z_2 - z_1) dA$$

$$\rightarrow dF = g \cdot (dm_F - dm_K)$$

Kapillarwirkung

$$\sigma = \frac{dE}{dA}$$
 Kapillarspannung

$$\sigma = \frac{r \cdot h \cdot \rho \cdot g}{2}$$



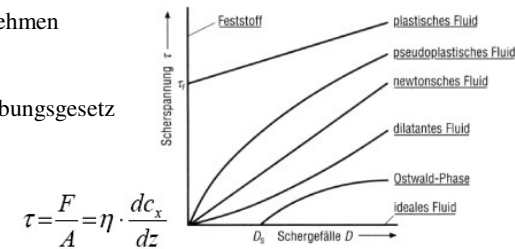
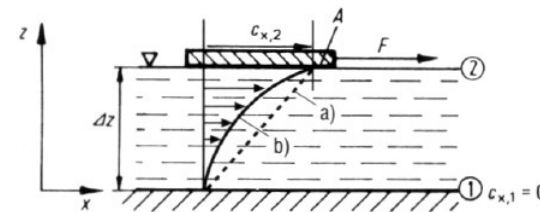
$$p_K = \frac{2 \cdot \sigma}{r_K}$$
 Kapillardruck

Viskosität

Def: Fähigkeit eines Fluids, Schubspannungen aufzunehmen

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dc_x}{dz}$$

NEWTONsches Fluidreibungsgesetz

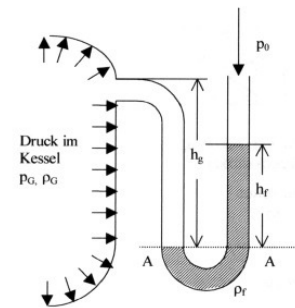


$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{dc_x}{dz}$$

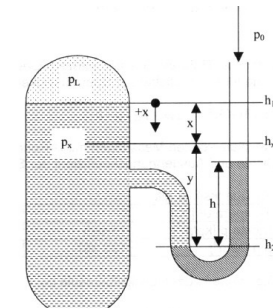
Schergefälle

$$D = \frac{dc_x}{dz}$$

Druck



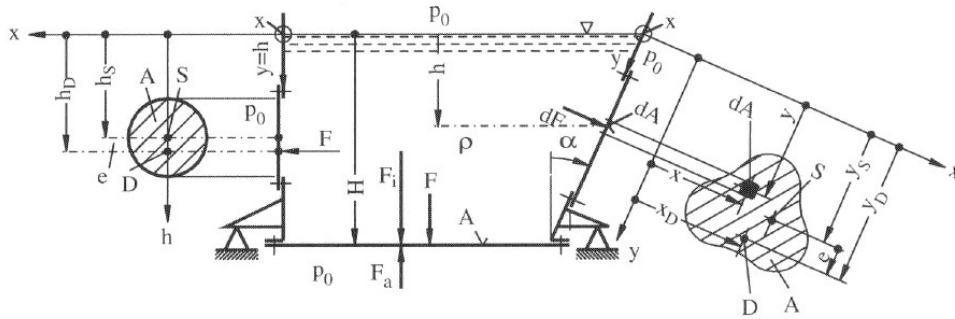
$$p_G \approx p_0 + \rho_F \cdot g \cdot h_F$$



$$p_x \approx p_0 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h - \rho_f \cdot y \cdot g$$

Einheit A	Multiplikationsfaktor	SI - Einheit
Pa = N/m ²	1	Pa
hPa = mbar	10 ²	Pa
MPa	10 ⁶	Pa
bar	10 ⁵	Pa
atm	1.01325 · 10 ⁵	Pa
mm Wassersäule = mm WS	9.80665	Pa
mm Quecksilber = mm Hg = Torr (760 mmHg = 1 atm)	133.32	Pa
psi = lb/in ² (1 in = 25.4 mm)	6894.757	Pa
psf = lb/ft ² (1 ft = 12 in = 0.3048 m)	47.88 = 6894.757/144	Pa

Druckkräfte auf Begrenzungsflächen



Kraft auf die Bodenplatte $F_B = F_i - F_a = \rho \cdot h \cdot g$

Kraft auf geneigte Fläche $dF(h) = \rho \cdot g \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot dA$

Betrag → aus hydrostatischem Druck im Flächenschwerpunkt

$$F = \rho \cdot g \cdot h_s \cdot A$$

Koordinaten des Druckpunkts

$$y_D = \frac{I_{x_s x_s}}{y_s \cdot A} + y_s$$

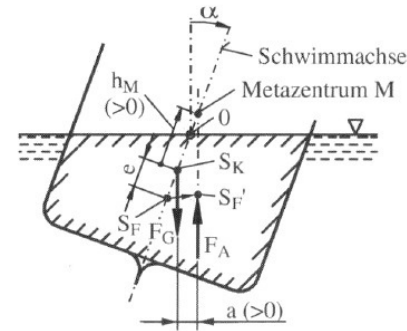
$$x_D = \frac{I_{x_y}}{y_s \cdot A_s}$$

Der Druckpunkt liegt immer tiefer als der Flächenschwerpunkt

Die Kraft auf die Behälterwand ist lediglich von der Füllhöhe abhängig, nicht vom absoluten Flüssigkeitsvolumen.

Kraft auf gekrümmte Flächen → siehe Skript Kapitel 2.2.10

Stabilität schwimmender Körper



SK = Körperschwerpunkt

SF = Schwerpunkt des verdrängten Fluids

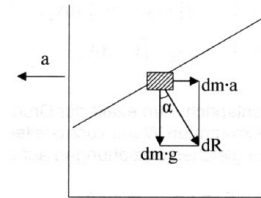
Metazentrum = SP aus Schwimmachse und Auftriebskraft

$$h_M = \frac{I_0}{V_F} - e$$

I_0 = Trägheitsmoment der Schwimmfläche
Schwimmfläche = Schnitt mit der Wasseroberfläche

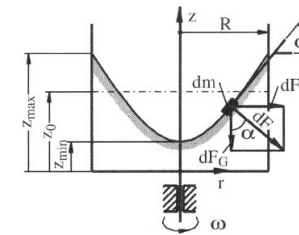
Stabilitätsbedingung: stabil → $h_M > 0$ indifferent → $h_M = 0$ instabil → $h_M < 0$

Fluide unter Beschleunigung



Translationsbeschleunigung

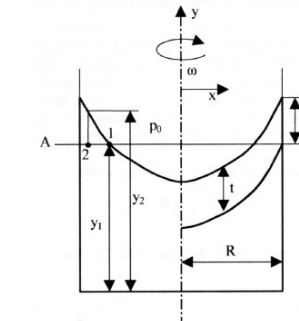
$$\tan \alpha = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Gewichtskraft}} = \frac{dm \cdot a}{dm \cdot g} = \frac{a}{g}$$



rotierende Flüssigkeiten

$$\tan \alpha = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Gewichtskraft}} = \frac{dm \cdot r \cdot \omega^2}{dm \cdot g} = \frac{r \cdot \omega^2}{g}$$

$$z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot R^2 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \right]$$



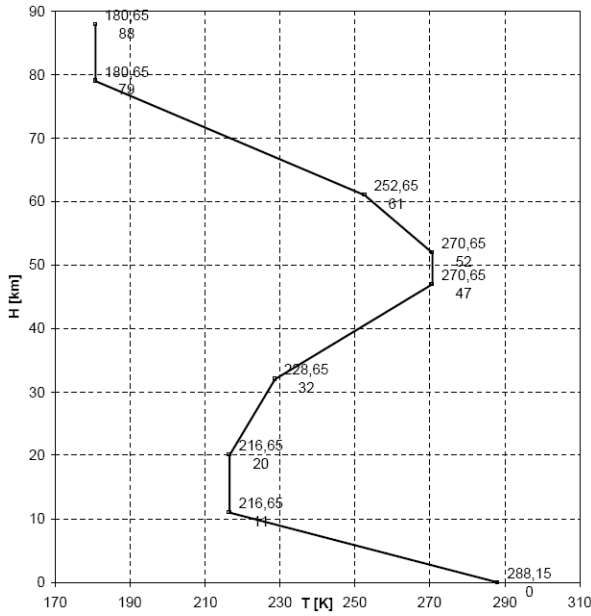
Druck auf den Behälterboden

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot y = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} + y_0 \right)$$

Druck im Inneren des Behälters

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot t$$

Atmosphäre der Erde (ISA Bedingungen)



Isotherme Temperaturschichtung

$$T_h = T_A = const.$$

$$p_h = p_A \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R T_h}\right) \cdot (h-h_A)}$$

$$\rho_h = \rho_A \cdot e^{-\left(\frac{g_0}{R T_h}\right) \cdot (h-h_A)}$$

Bereiche mit linear veränderlicher T:

$$T_h = T_A + a \cdot (h - h_A)$$

$$p_h = p_A \cdot \left(\frac{T_h}{T_A}\right)^{\frac{-g_0}{a \cdot R}}$$

$$\rho_h = \rho_A \cdot \left(\frac{T_h}{T_A}\right)^{\left[\frac{-g_0}{a \cdot R} + 1\right]}$$

h [m]	h _A [m]	T _A [K]	a [K/m]	p _A [Pa]	ρ _A [kg/m ³]
-5 · 10 ³ - 11 · 10 ³	0	288.15	-6.5 · 10 ⁻³	101325	1.2250
11 · 10 ³ - 20 · 10 ³	11 · 10 ³	216.65	0.0	22632	0.3639
20 · 10 ³ - 32 · 10 ³	20 · 10 ³	216.65	+1.0 · 10 ⁻³	5475	0.0880
32 · 10 ³ - 47 · 10 ³	32 · 10 ³	228.65	+2.8 · 10 ⁻³	868	0.0132
47 · 10 ³ - 52 · 10 ³	47 · 10 ³	270.65	0.0	111	0.0014
52 · 10 ³ - 61 · 10 ³	52 · 10 ³	270.65	-2.0 · 10 ⁻³	59	0.0008
61 · 10 ³ - 79 · 10 ³	61 · 10 ³	252.65	-4.0 · 10 ⁻³	18	0.0002
79 · 10 ³ - 88 · 10 ³	79 · 10 ³	180.65	0.0	1	1.9 · 10 ⁻⁵

Einfluss der Luftfeuchtigkeit

$$R_{\text{feuchte Luft}} = \frac{R_{\text{trockene Luft}}}{1 - \frac{0.377 \cdot \varphi \cdot p_S}{p}}$$

R_{trockene Luft} = spez. Gaskonstante (287.05 [J/kgK])

p_S = Sättigungsdruck von Wasser

p = Luftdruck

φ = Relative Luftfeuchte

T [°C]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
p _S [Pa]	611	872	1227	1704	2337	3166	4241	5622	7375	9582	12340	15740	19920

Teil 2: Strömung von Fluiden

Stationäre Strömung ↔ instationäre Strömung

Zeitlich unveränderlich

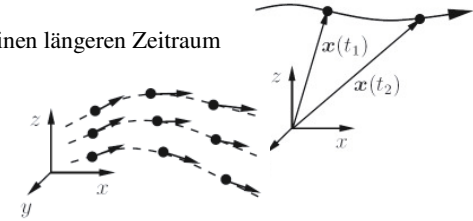
zeitlich veränderlich

Bahnlinie

Bewegung eines Masseiteilchens über einen längeren Zeitraum

Stromlinie

Momentaufnahme einer Kurvenschar aus Geschwindigkeitsvektoren verschiedener Masseiteilchen



Kontinuitätsgleichung (Masseerhaltung)

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot c \cdot A = const$$

c = Strömungsgeschwindigkeit

Formen der BERNOULLI - Gleichung

erster Hauptsatz der Thermodynamik für stationäre Strömung mit inkompressiblem Medium

$$\frac{c^2}{2} + g \cdot z + \frac{p}{\rho} = const$$

Energieform

$$\frac{\rho}{2} \cdot c^2 + \rho \cdot g \cdot z + p = const$$

Druckform

$$\frac{c^2}{2 \cdot g} + z + \frac{p}{\rho \cdot g} = const$$

Höhenform

BERNOULLI-Gleichung unter Berücksichtigung von Verlusten und Arbeit

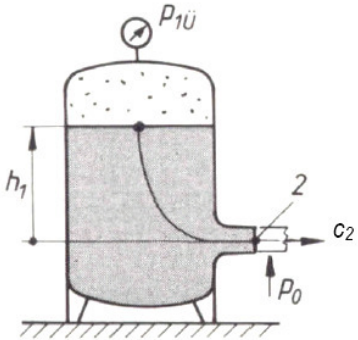
(Erweiterung um die Verlustterme)

	Linke Seite	Rechte Seite
Energieform	Spez. Förderarbeit (Pumpe) Y	Reibungsverlust $e_v = \zeta \cdot \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2}$
Druckform	Totaldruckänderung $\Delta p_t = Y \cdot \rho$	Druckverlust infolge Reibung $\Delta p_v = \zeta \cdot \frac{\rho \cdot (c_2^2 - c_1^2)}{2}$
Höhenform	Förderhöhe $H = \frac{Y}{g}$	Verlusthöhe $h_v = \zeta \cdot \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2 \cdot g}$

Hydraulische Leistung: $P_h = \dot{m} \cdot Y = \rho \cdot \dot{V} \cdot Y = \rho \cdot \dot{V} \cdot g \cdot H$

Ausfluss aus Behältern - TORRICHELLI'sche Gleichung

Annahme: Ausfluss erfolgt verlustfrei, $A_1 \gg A_2$



Ausfluss aus offenem Behälter

$$c_{2th} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Ausfluss aus Behälter mit Überdruck (Bild)

$$c_{2th} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h + 2 \cdot \frac{p_1 \ddot{u}}{\rho}}$$

Verlustbehafteter Ausfluss aus Behältern

Verlustziffer:

$$c_2 = \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

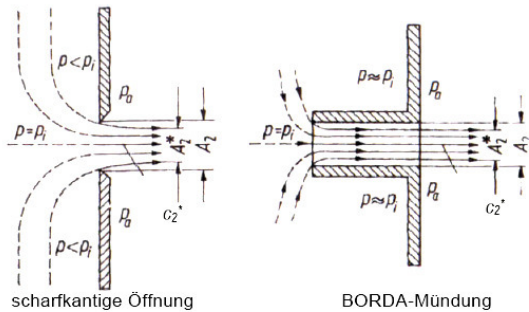
Kontraktionszahl:

$$\alpha = \frac{A_{Str}}{A_L} < 1$$

Ausflusskoeffizient:

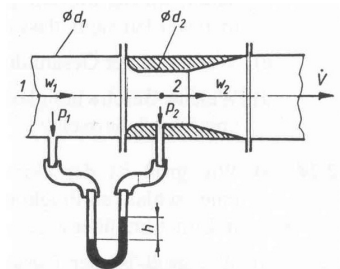
$$\mu = \alpha \cdot \varphi$$

$$\rightarrow \dot{V} = \alpha \cdot A \cdot \varphi \cdot c_{2th} = \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$



Öffnung	Verlustziffer φ	Kontraktionszahl α	Ausflusskoeffizient μ
scharfkantig	0.97	0.61 - 0.64	0.59 - 0.62
gerundet	0.97 - 0.99	1	0.97 - 0.99

Venturi-Rohr



Volumenstrom:

$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \cdot A_2$$

Kennzahlen zur Modellbildung

Reibungskräfte	Reynolds-Zahl	Re	$Re = \frac{v \cdot L}{\nu} = \frac{v \cdot L \cdot \rho}{\mu}$
Gewichtskräfte	Froude-Zahl	Fr	$Fr = \frac{v^2}{L \cdot g}$, $Fr = \frac{v}{\sqrt{L \cdot g}}$
Druckkräfte	Euler-Zahl	Eu	$Eu = \frac{p}{\rho \cdot v^2}$
Periodendauer	Strouhal-Zahl	Sr	$Sr = \frac{L}{v \cdot t} = \frac{f \cdot d}{v}$
Kompressibilität	Mach-Zahl	M	$M = \frac{v}{c}$

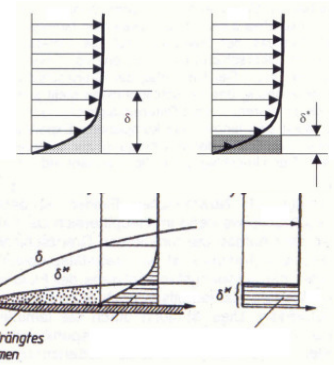
ν [m²/s] = kinematische Viskosität
 μ oder η [Pa·s] = dynamische Viskosität
 Reynoldszahl allgemein:
 $Re = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$

Widerstand von Körpern

-Reibungswiderstand

Reibungsbehaftete Strömung wird an der Oberfläche abgebremst. Auftretende Schubspannung:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{dc}{dz} \quad \eta = \text{dyn. Viskosität}$$



Dicke δ der Grenzschicht:

Abstand, an dem die Strömung $c = 0,99 \cdot c_\infty$ erreicht.

Aufdickung der Wand (Verdrängungsdicke):

$$\delta^* = 1/3 \cdot \delta \text{ [laminar]}$$

$$\delta^* = 1/8 \cdot \delta \text{ [turbulent]}$$

längs angeströmte Platte

Dicke der laminaren Grenzschicht:

$$\delta_{lam} = 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{x \cdot \nu}{v_\infty}}$$

Dicke der turbulenten Grenzschicht:

$$\delta_{turb} = 0.37 \cdot x' \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{Re_x}} = 0.37 \cdot x' \cdot Re_x^{-0.2}$$

Reynoldszahl am Umschlagpunkt:

$$Re_{krit} = \frac{v_\infty \cdot x_{krit}}{\nu_{Luft}}$$

Berechnung des Reibungswiderstands

$$F_R = c_R \cdot O \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad O = \text{bespülte Oberfläche, } c_R = \text{Reibungsbeiwert}$$

laminare Grenzschicht der ebenen Platte (Re-Zahl bezogen auf die gesamte Plattenlänge)

$$c_R = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}$$

vollständig turbulente Platte:

ab $Re > 10^7$, Beziehung nach Prandtl-Schlichting

$$c_R = \frac{1.328}{\sqrt[5]{Re}}$$

$$c_R = \frac{0.455}{(\log Re)^{2.58}}$$

Berücksichtigung der laminaren Anlaufstrecke (Prandtl)

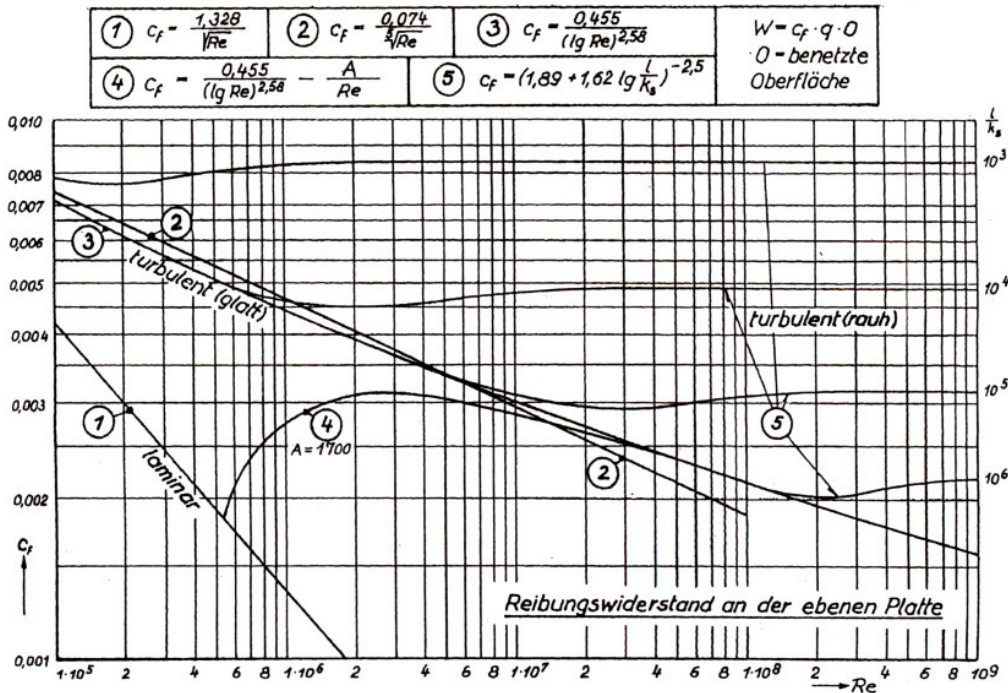
$$c_R = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}} - \frac{A}{Re_{krit}}$$

Korrekturfaktoren:

Re_{krit}	$3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$3 \cdot 10^6$
A	1050	1700	3300	8700

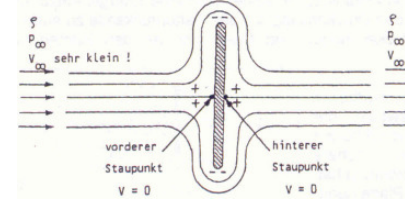
Diagramm: Berücksichtigung der Oberflächenrauigkeit

K_s = Sandrauigkeit (Vergleichswert)

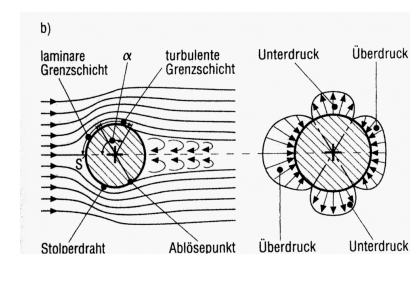
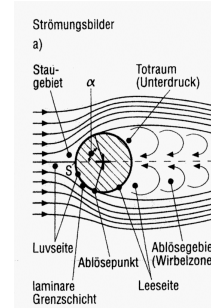
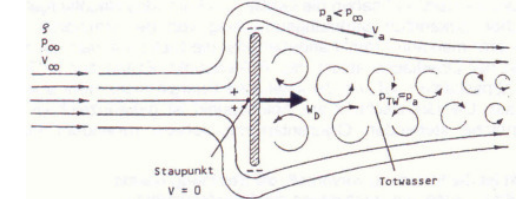


- Druckwiderstand (Formwiderstand)

ideale reibungsfreie Strömung



ideale Reibungsbehaftete Strömung



Turbulente Grenzschicht verursacht zwar einen höheren Reibungswiderstand, hat aber aufgrund der größeren kinetischen Energie eine geringere Neigung zur Ablösung als im laminaren Fall, Grenzschicht liegt länger an

Tabellen zu Formwiderstandsbeiwerten → nächste Seite

- Induzierter Widerstand

der induzierte Widerstand ist eine Folge der Verwirbelungen eines umströmten Körpers

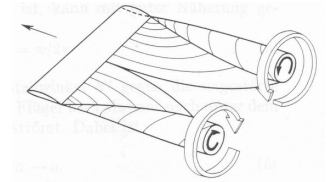
Beiwert des induzierten Widerstands: $C_{w,i}$ -Wert

$$C_{w,i} = \frac{e \cdot C_A^2}{\pi \cdot \Lambda}$$

e = Formfaktor, Normalfall=1

C_A = Auftriebsbeiwert $C_A = \frac{A}{\rho/2 \cdot v_\infty^2 \cdot S}$ (S = Flügelfläche)

Λ = Streckung, Verhältnis von Spannweite b zur Flügelfläche S $\Lambda = \frac{b^2}{S}$



- Gesamtwiderstand

Gesamtwiderstand = Summe der Teilwiderstände: $W_{ges} = W_R + W_D + W_{ind} + W_{int} + W_{Rest}$

Quadratisches Widerstandsgesetz:

$$W = C_w \cdot \bar{q} \cdot S = C_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot S$$

Cw-Wert [-] beinhaltet sämtliche Widerstandseinflüsse
S = beliebige Bezugsfläche

Formwiderstand einfacher Körper

Kugel $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5 : c_W = 0,47$ $Re = 4 \cdot 10^5 : c_W = 0,09$ $Re = 10^6 : c_W = 0,13$	Rotationsellipsoid $\frac{a}{b} = 0,75$ $Re < 5 \cdot 10^5 : c_W = 0,6$ $Re > 5 \cdot 10^5 : c_W = 0,21$ $\frac{a}{b} = 1,80$ $Re > 10^5 : c_W = 0,05 \dots 0,1$	Kreiszylinder $Re < 9 \cdot 10^4 : l/d = 1 : c_W = 0,63$ <table border="1"> <tr><td>2</td><td>0,68</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,74</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,82</td></tr> <tr><td>40</td><td>0,98</td></tr> <tr><td>∞</td><td>1,20</td></tr> </table> $Re > 5 \cdot 10^5 : \infty : c_W = 0,35$	2	0,68	5	0,74	10	0,82	40	0,98	∞	1,20	Profilstab $Re > 10^5 : l/d = 2 : c_W = 0,2$ <table border="1"> <tr><td>3</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,06</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,083</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,094</td></tr> </table>	3	0,1	5	0,06	10	0,083	20	0,094		
2	0,68																						
5	0,74																						
10	0,82																						
40	0,98																						
∞	1,20																						
3	0,1																						
5	0,06																						
10	0,083																						
20	0,094																						
Halbkugel ohne Boden : $c_W = 0,34$ mit Boden : $0,40$	Halbkugel ohne Boden : $c_W = 1,33$ mit Boden : $1,17$	Kegel (ohne Boden) $\alpha = 30^\circ : c_W = 0,34$ $60^\circ : 0,51$	Kegel (schlank) $c_W = 0,58$																				
Kreiszylinder $l/d = 1 : c_W = 0,91$ <table border="1"> <tr><td>2</td><td>0,85</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,87</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,99</td></tr> </table>	2	0,85	4	0,87	7	0,99	Prisma $l/a = 2,5 : c_W = 0,81$	Prisma $\alpha = 90^\circ : l/a = 5 : c_W = 1,56$ <table border="1"> <tr><td>∞</td><td>2,03</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,92</td></tr> <tr><td>∞</td><td>1,54</td></tr> </table>	∞	2,03	5	0,92	∞	1,54	I-Profil-Stab $c_W = 2,04$ $c_W = 0,86$								
2	0,85																						
4	0,87																						
7	0,99																						
∞	2,03																						
5	0,92																						
∞	1,54																						
Kreisplatte $c_W = 1,11$	Kreisringplatte $\frac{d}{t} = 0,5 : c_W = 1,22$	2 Kreisplatten hintereinander <table border="1"> <tr><td>$\frac{l}{d} = 1$</td><td>$c_W = 0,93$</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,78</td></tr> <tr><td>2</td><td>1,04</td></tr> <tr><td>3</td><td>1,52</td></tr> </table>	$\frac{l}{d} = 1$	$c_W = 0,93$	1,5	0,78	2	1,04	3	1,52	Rechteckplatte <table border="1"> <tr><td>$\frac{a}{b} = 1$</td><td>$c_W = 1,10$</td></tr> <tr><td>2</td><td>1,15</td></tr> <tr><td>4</td><td>1,19</td></tr> <tr><td>10</td><td>1,29</td></tr> <tr><td>18</td><td>1,40</td></tr> <tr><td>8</td><td>2,01</td></tr> </table>	$\frac{a}{b} = 1$	$c_W = 1,10$	2	1,15	4	1,19	10	1,29	18	1,40	8	2,01
$\frac{l}{d} = 1$	$c_W = 0,93$																						
1,5	0,78																						
2	1,04																						
3	1,52																						
$\frac{a}{b} = 1$	$c_W = 1,10$																						
2	1,15																						
4	1,19																						
10	1,29																						
18	1,40																						
8	2,01																						

Körper	c_W
(1)	1,11
(2)	0,34
(3)	0,51
(4)	0,34
(5)	1,33
(6)	0,06

Rechteckige Platte	b/h	1	2	4	10	18	∞
	c_W	1,10	1,15	1,19	1,29	1,4	2,01
Kreisplatte	b/h	1	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
Ebene Platten	c_W	1,10	1,15	1,19	1,29	1,4	2,01

Berechnung der Reynoldszahl

$$Re = \frac{c_\infty \cdot D}{\nu} = \frac{c_\infty \cdot D \cdot \rho}{\mu}$$

ρ aus idealer Gasgleichung

dynamische Viskosität μ (Sutherland Formel)

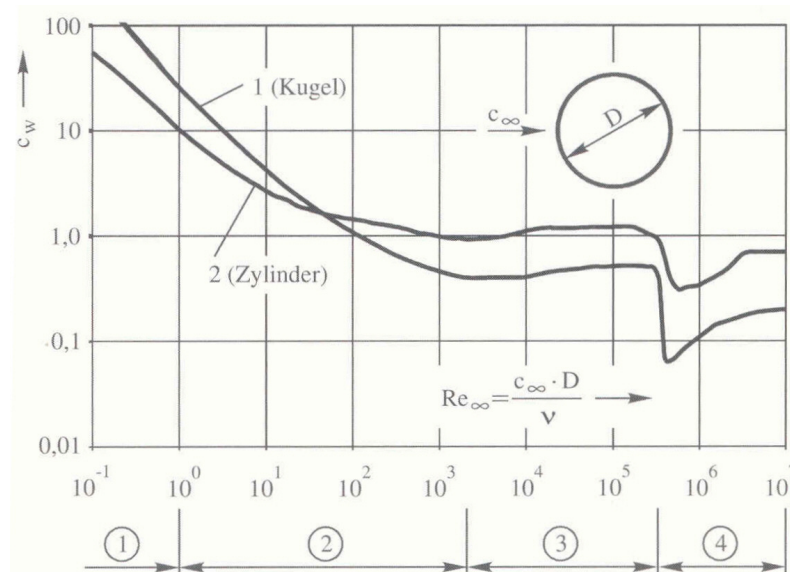
kinematische Viskosität ν

$$\mu = 1.458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T^{1.5}}{T + 110.4} \quad [Pa \cdot s] \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

Umströmung von Körpern (genauer siehe Skript)

	Kugelumströmung	Zylinderumströmung
Geschwindigkeitsverteilung	$c_S(\varphi) = \frac{3}{2} \cdot c_\infty \cdot \sin \varphi$	$c_S(\varphi) = 2 \cdot c_\infty \cdot \sin \varphi$
Druckverteilung	$p_S(\varphi) = p_\infty + \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{c_S(\varphi)}{c_\infty} \right)^2 \right]$	$c_p(\varphi) = 1 - 4 \cdot \sin^2 \varphi$
Druckbeiwert	$c_p(\varphi) = 1 - \frac{9}{4} \cdot \sin^2 \varphi$	

Widerstandsbeiwerte:



Korrekturfaktoren:

$0 < b/h \leq 4 \rightarrow K = 0,6$

$4 < b/h \leq 8 \rightarrow K = 0,7$

$8 < b/h \leq 40 \rightarrow K = 0,8$

$40 < b/h \leq \infty \rightarrow K = 1,0$

$$c_W \left(\frac{b}{h} \right) = K \cdot c_W \left(\frac{b}{h} = \infty \right)$$

Impulssatz

Definition des Impulses:

$$\vec{I} = m \cdot \vec{c}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{c})}{dt} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

Definition des Impulsstroms:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{I} = \dot{m} \cdot \vec{c} \quad [N]$$

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \dot{m} \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1)}$$

Unterscheidung von drei Klassen von Anwendungsfällen

(1) Stromröhre ist eine freie Kontrollfläche

Zu bestimmen ist die Reaktionskraft \vec{F}_{KS} auf einen umströmten Körper innerhalb der Stromröhre oder der Körper ist Teil der Stromröhre

$$\vec{F}_K = \vec{F}_{KS} = -\vec{F}_S = -\dot{m} \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_W + \vec{F}_G$$

Herrscht auf der Stromröhre und in den Ein- und Austrittsflächen A_1 und A_2 konstanter Druck (Freistrah), so gilt

$$\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_W = 0$$

(2) Stromröhre ist teilweise oder vollständig eine körpergebundene Kontrollfläche

Zu bestimmen ist die Reaktionskraft auf die Innenseite des körpergebundenen Teils der Stromröhre und auf evtl. Einbauten

$$\vec{F}_K = \vec{F}_{Ki} + \vec{F}_{KS} = -(\vec{F}_W + \vec{F}_S) = -\dot{m} \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_G$$

(3) Stromröhre ist teilweise oder vollständig eine körpergebundene Kontrollfläche, die mit einem Außendruck p_a beaufschlagt wird

Zu bestimmen ist die Reaktionskraft \vec{F}_K auf die Stromröhre und auf evtl. Einbauten unter

Berücksichtigung der Außendruckkraft \vec{F}_a

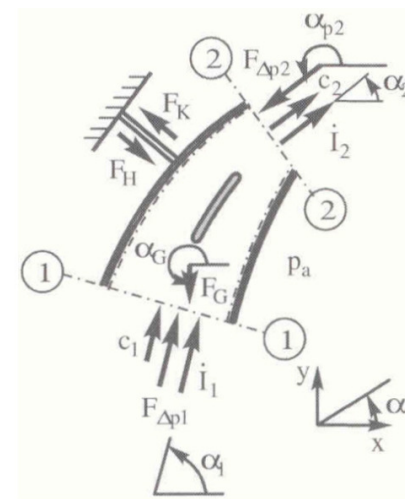
$$\vec{F}_K = \vec{F}_{Ki} + \vec{F}_{KS} + \vec{F}_a = -(\vec{F}_W + \vec{F}_S - \vec{F}_a) = -\dot{m} \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) + \vec{F}_{\Delta p1} + \vec{F}_{\Delta p2} + \vec{F}_G$$

$$\vec{F}_{\Delta pi} = (p_i - p_a) \cdot A_i \quad \text{Differenzdruckkraft zum Außendruck } p_a$$

$$\vec{F}_H = -\vec{F}_K \quad \text{Haltekraft}$$

Anwendungsprinzip des Impulssatzes

Körpergebundene Stromröhre unter Berücksichtigung eines Außendrucks p_a (Rohrkrümmer)



1. Skizze des Bauteils
2. Kontrollraum, strichpunktierte Linie
3. Ein- und Austrittsfläche kennzeichnen (1), (2)
4. Koordinatensystem festlegen
5. Winkeldefinition mathematisch positiv definieren
6. Geschwindigkeiten \vec{c}_i , Druckkräfte $\vec{F}_{\Delta pi}$,

Impulsströme \vec{I}_i und Gewichtskraft \vec{F}_G

Einzeichnen

7. Berechnung von \vec{c}_i , p_i , ρ_i und \dot{m}_i in Ein- und Austrittsflächen (1), (2) mittels Kontinuitäts-, Energie- und thermischer Zustandsgleichung

8. Berechnung der Beträge für

- Impulsströme $\dot{I}_i = \dot{m} \cdot c_i$

- Druckkräfte $F_{\Delta pi} = (p_i - p_a) \cdot A_i$ bzw. $F_{pi} = p_i \cdot A_i$

- Gewichtskraft $F_G = V_{\text{Kontrollraum}} \cdot \rho_{\text{Fluid}} \cdot g$

9. Berechnung der Komponenten der Körperkraft \vec{F}_K

$$F_{Kx} = F_K \cdot \cos \alpha = -[\dot{m} \cdot (c_2 \cdot \cos \alpha_2 - c_1 \cdot \cos \alpha_1)] + F_{\Delta p1} \cdot \cos \alpha_1 + F_{\Delta p2} \cdot \cos \alpha_{p2} + F_G \cdot \cos \alpha_G$$

$$F_{Ky} = F_K \cdot \sin \alpha = -[\dot{m} \cdot (c_2 \cdot \sin \alpha_2 - c_1 \cdot \sin \alpha_1)] + F_{\Delta p1} \cdot \sin \alpha_1 + F_{\Delta p2} \cdot \sin \alpha_{p2} + F_G \cdot \sin \alpha_G$$

mit $\alpha_G = \alpha_1 + 180^\circ$ und $\alpha_{p2} = \alpha_2 + 180^\circ$

$$F_K = \sqrt{F_{Kx}^2 + F_{Ky}^2} \quad \alpha_K = \arctan\left(\frac{F_{Ky}}{F_{Kx}}\right)$$

Drallsatz

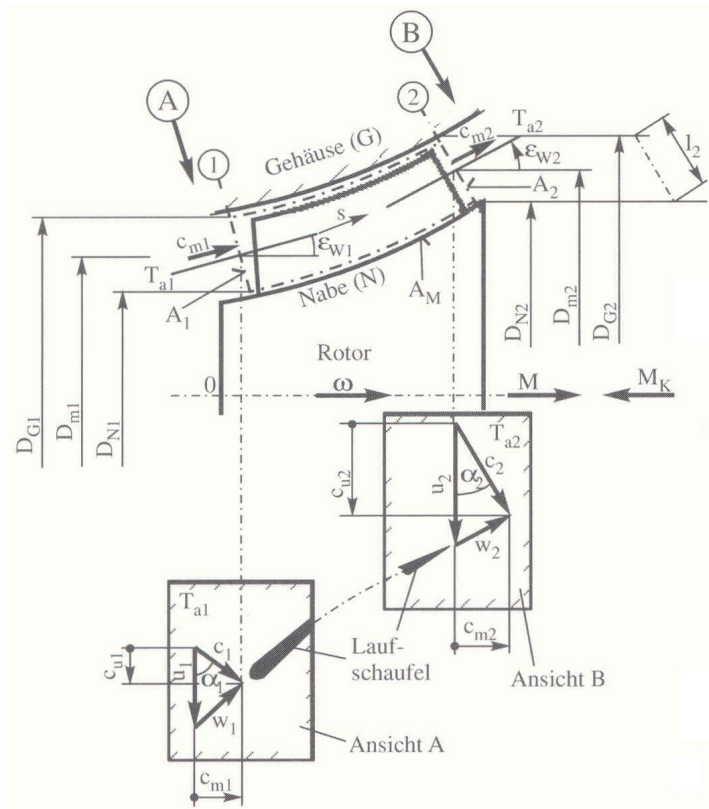
Def. Drall=Drehimpuls:

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) = \vec{r} \times \vec{I} = J \cdot \omega \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Drallstrom

$$\vec{\dot{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{m} \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) \quad \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \dot{m} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{c}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{c}_1) = \sum \vec{M}$$

Anwendung: Laufrad einer Strömungsmaschine



$c_{1,2}$ Absolutgeschwindigkeiten

$w_{1,2}$ Relativgeschwindigkeiten

$c_{u1,u2}$ Umfangsgeschwindigkeiten

$\epsilon_{W1,2}$ Neigungswinkel der Tangentialebenen

Moment auf das Fluid im Kontrollraum

$$M = \dot{m} \cdot (r_{m2} \cdot c_{u2} - r_{m1} \cdot c_{u1})$$

Übertragene Leistung P_{12} vom Laufrad auf das Fluid

Mit dem mittleren Radius r_m der Stromfläche

$$r_m = \frac{D_m}{2} \quad \text{und} \quad D_m = \sqrt{\frac{D_G^2 + D_N^2}{2}}$$

und der Umfangsgeschwindigkeit u und der Drehzahl n

$$u = r \cdot \omega = D \cdot \pi \cdot n \quad \text{bzw.} \quad u_m = r_m \cdot \omega = D_m \cdot \pi \cdot n$$

ergibt sich für die auf das mit ω rotierende Laufrad übertragene Leistung P_{12}

$$P_{12} = M \cdot \omega = \dot{m} \cdot (r_{m2} \cdot c_{u2} - r_{m1} \cdot c_{u1}) \cdot \omega$$

$$\Rightarrow P_{12} = \dot{m} \cdot (u_{m2} \cdot c_{u2} - u_{m1} \cdot c_{u1})$$

Spezifische technische Arbeit w_{t12}

Leistung bezogen auf den Massestrom ergibt spezifische technische Arbeit w_{t12}

$$\frac{P_{12}}{\dot{m}} = w_{t12} = (u_{m2} \cdot c_{u2} - u_{m1} \cdot c_{u1})$$

Momente, die von feststehenden Leiträdern auf das Fluid ausgeübt werden

Ersetzen der Umfangsgeschwindigkeiten $c_{u1,u2}$ durch die Absolutgeschwindigkeiten $C_{1,2}$ am

Ein- und Austritt des Leitrades

Leitrad steht fest, d.h. $\omega = 0$, d.h. an den Leiträdern wird keine Leistung mit dem Fluid ausgetauscht

$$\Rightarrow \frac{P_{12}}{\dot{m}} = w_{t12} = 0$$

$$M = \dot{m} \cdot (r_{m2} \cdot c_2 - r_{m1} \cdot c_1)$$

Reaktionsmoment $M_K = -M$

Rohrströmung

Laminare Rohrströmung (Re < 2320)

$$v_m = \frac{1}{2} \cdot v_{\max}$$

Turbulente Rohrströmung (Re > 2320)

$$v_m = 0.875 \cdot v_{\max}$$

Rohrreibungswiderstand

Reibungswiderstand an der Rohrwand

$$W = \tau \cdot O = c_f \cdot \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot v^2}_{\text{dyn. Druck}} \cdot \underbrace{\pi \cdot d \cdot L}_{\text{benetzte Fläche}}$$

Verlusthöhe $h_v = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$

Verlustbeiwert $\zeta = \lambda \cdot \frac{L}{d}$

Druckverlust $\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$

λ = Rohrreibungszahl. Rechnerisch oder aus Moody-Diagramm

Widerstandsbeiwerte für Einbauten (Krümmer, Diffusor etc.) auf den nächsten Seiten

hydraulischer Durchmesser

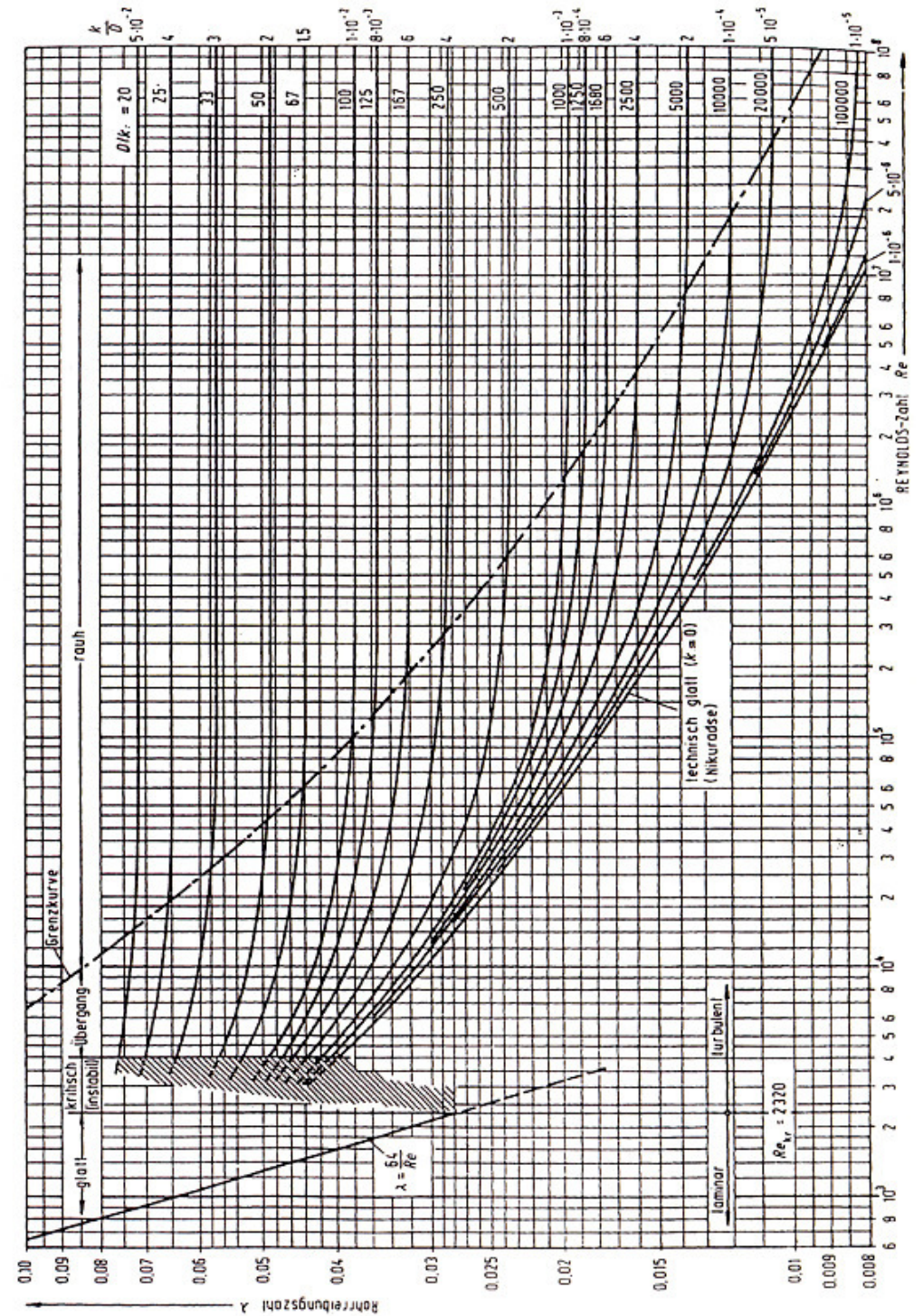
zur Berechnung von Rohren mit nicht kreisförmigen Querschnitten

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U}$$

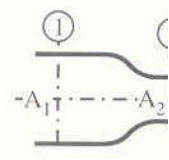
A = durchströmte Fläche

U = Umfang des durchströmten Querschnitts

Moody Diagramm

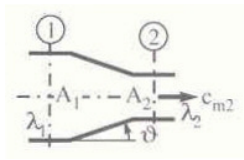


Querschnittsverengung - stetig (Konturdüse)



$$0 < \zeta < 0.075$$

Querschnittsverengung - stetig (konische Düse)

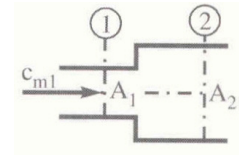


$$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad \text{mittlere Rohrreibungszahl}$$

$$\zeta = \frac{\lambda_m}{8 \cdot \tan \vartheta} \cdot \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{0.5} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{0.5} + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{1.0} + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{1.5} \right]$$

Verlustziffern ζ von Formstücken und Einbauten (Zusammenfassung)

Querschnittserweiterung - unstetig (Stufendiffuser)



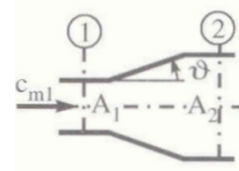
$$\alpha = \beta = 1$$

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \beta_1 \neq \beta_2 \neq 1$$

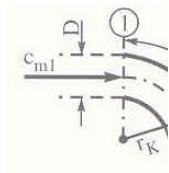
$$\zeta = \alpha_1 - 2 \cdot \beta_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} + (2 \cdot \beta_2 - \alpha_2) \cdot \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

Querschnittserweiterung - stetig (Diffusor)



$$\zeta_{diff} = (1 - \eta_{diff}) \cdot \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

Richtungsänderung - Rohrbogen, glatt, $Re = 2 \cdot 10^5$



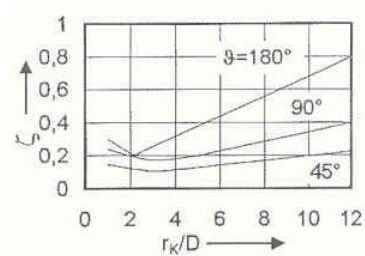
$$\left(\frac{r_K}{D} \right)_{opt} = 2 \dots 3$$

Rohrbögen mit Leitblechen

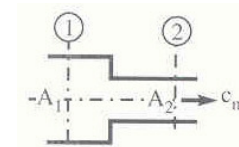
$$\zeta \approx 0.15$$

Rohrbögen mit profilierten Leitblechen

$$\zeta \approx 0.05$$



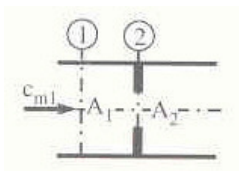
Querschnittsverengung - unstetig (Stufendüse)



$$\zeta \approx 1.5 \cdot \left(\frac{1 - \alpha_K}{\alpha_K} \right)$$

$$\alpha_K \approx 0.614 \cdot 0.133 \cdot \frac{A_2}{A_1} - 0.261 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + 0.511 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^3$$

Querschnittsverengung - unstetig (Blende)



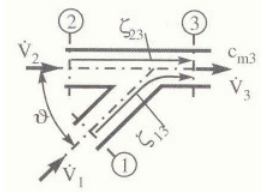
Für $0.05 \leq \frac{A_2}{A_1} \leq 0.95$ gilt

$$\zeta \approx \exp \left[8.94941 - 47.8557 \cdot \frac{A_2}{A_1} + 169.798 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 349.829 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^3 + 353.634 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^4 - 140.833 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^5 \right]$$

Verzweigungen - Stromvereinigung

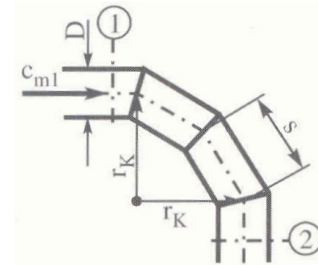
$$A_1 = A_2 = A_3$$

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}_3$$



$\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_3}$	$\vartheta = 45^\circ$		$\vartheta = 90^\circ$	
	$\zeta_{2,3}$	$\zeta_{1,3}$	$\zeta_{2,3}$	$\zeta_{1,3}$
0.0	0.04	-0.92	0.04	-1.20
0.2	0.17	-0.38	0.17	-0.40
0.4	0.19	0	0.30	0.08
0.6	0.09	0.22	0.41	0.47
0.8	-0.17	0.37	0.51	0.72
1.0	-0.54	0.37	0.60	0.91

Richtungsänderung - Segment-Krümmen

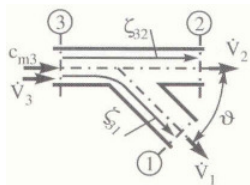


r_K/D	$2 \times 45^\circ$	$3 \times 30^\circ$	$4 \times 22.5^\circ$
1	0.44	0.42	0.40
2	0.31	0.27	0.24
3	0.35	0.19	0.185
3.25			0.18
4	0.40	0.22	0.19
5	0.45	0.26	0.21
6	0.55	0.29	0.23

Verzweigungen - Stromtrennung

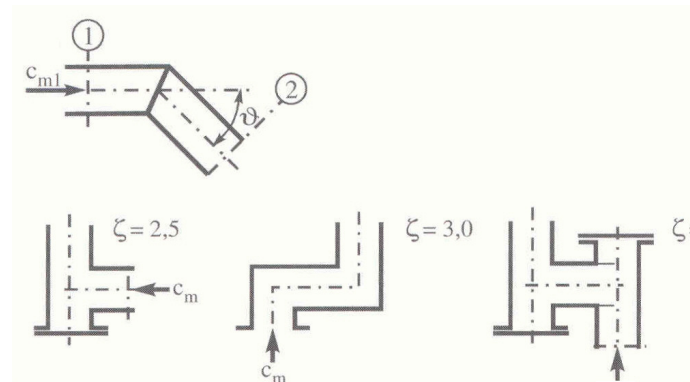
$$A_1 = A_2 = A_3$$

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}_3$$



$\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_3}$	$\vartheta = 45^\circ$		$\vartheta = 90^\circ$	
	$\zeta_{3,2}$	$\zeta_{3,1}$	$\zeta_{3,2}$	$\zeta_{3,1}$
0.0	0.04	0.90	0.04	0.95
0.2	-0.06	0.68	-0.08	0.88
0.4	-0.04	0.50	-0.05	0.89
0.6	0.07	0.38	0.07	0.95
0.8	0.20	0.35	0.21	1.10
1.0	0.33	0.48	0.35	1.28

Richtungsänderung - Rohrknie



Stromtrennung

